高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

得 分 欄		填充題	1	2	3

個人賽試題

________國民中學____年級　編號：________　姓名：_________

性別:□男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 求 $1^3+3^3+5^3+\cdots+2023^3+2025^3$的個位數字為何數？　　__3__

2. 一個正整數若能夠表示為兩個非質數之和則稱為“幸運數”，例如: 1 就不 是“幸運數”，24 = 10 + 14，所以 24 為“幸運數”。從 1 開始算起 ，求正整數中第 2025 個幸運數是多少?　　__2029__

3. 已知 a,b,c 滿足 $a+b+c=0$，$abc=16$，求正數 c 的最小值為 __4__

4. 假設x滿足不等式$\frac{2x-1}{3}-1\geq x-\frac{5-3x}{2}$，若$|x-1|-|x+3|$的最大值為$M$、最小值為$m$，則 $M+m$之值為何?　　__$\frac{8}{11}$__

5. 設正數 a 的小數部分為 b 且 $b\neq 0$，若 $a^2+b^2=13$，求$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$之值為何?　　__$-\frac{3}{2}$__

6. 若 n 為正整數且 $4n-3$ 整除 $114n$，試求出所有滿足條件的 n 值為何?　　__1, 3 或 15__

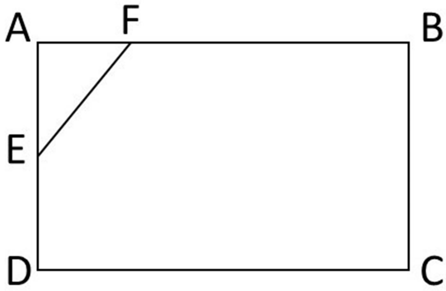
7. 已知在數列$a_1,a_2,\ldots,a_n$中，任何五項之和均為負數，而任何九項之和均為正數，試問 n 的最大值是多少?　　__無解__

8. 有一疊編號為 1～15 的牌，開始時按某種順序疊好，進行如下之操作：將最上面的第一張牌放到桌面上，再把第二張牌放到整疊牌的最下面。不斷重複這兩個操作，直到所有 15 張牌都在桌面上依次疊放成一堆為止。如果桌上的牌之編號從上到下恰好依序排列成 1～15，請問編號為 13 的牌在原來的那疊牌中，排在從最底下第一張往上算起的第幾張?

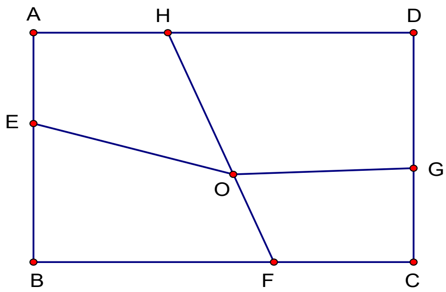
　　__11__

9. 如圖所示，將長方形 $ABCD$ 切去一角後得到的五邊形 $BCDEF$ 的五個邊長由小至大為 17, 20, 24, 28, 39（並非依五邊形的順序排列）。試求五邊形 $BCDEF$ 的面積。

_____1032______

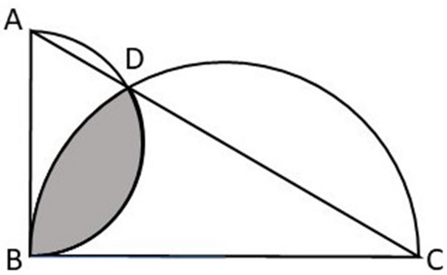


10. 如圖所示，已知在長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=16$，點 E, F, G, H 分別在 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$上，使得$\overline{AE}=4$，$\overline{BF}=10$，　$\overline{DG}=6$，$\overline{AH}=6$，點 O 在線段$\overline{HF}$上，使得四邊形 $AEOH$ 的面積為 36，求四邊形 $OFCG$ 的面積為多少？ ____26_____



11. 如圖所示，已知$\angle ABC=90°$，分別以$\overline{AB}$和$\overline{BC}$為直徑作兩個半圓且交於D點。若$\overline{AD}=2$，$\overline{CD}=6$，試求灰色區域之面積為多少？

___ $\frac{10}{3}\pi-4\sqrt{3}$ ___



12. 設$|a_i|=1$，$1\times a_1+2\times a_2+3\times a_3+\cdots+n\times a_n$ 的值一定不會為 0。若$n\leq 100$，求滿足此條件所有 n 值的總和為多少？

____2475____

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

（注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由）

1. 設 a,b,c 為互不相等的實數且滿足 $b^2+c^2=2a^2+16a+14$ 及 $bc=a^2-4a-5$，求 a 的值為何?

【參考解答】

$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=2a^2+16a+14+2(a^2-4a-5)=4(a+1)^2$，所以

$b+c=\pm2(a+1)$。因為 $bc=a^2-4a-5$

所以 b,c 為 $x^2\pm2(a+1)x+a^2-4a-5=0$ 的二解

已知 a,b,c 為互不相等的實數，所以

$$\begin{cases}\triangle=[\pm2(a+1)]^2-4(a^2-4a-5)>0 & (\text{因}b\neq c)\\ a^2\pm2(a+1)a+a^2-4a-5\neq0 & (\text{因}a\neq b\text{、}a\neq c)\end{cases}$$

所以 $a>-1$ 且 $a\neq\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$，$a\neq-\frac{5}{6}$

2. 設 a 與 b 是正整數，且滿足$2\left(\sqrt{\frac{10}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}\right)$是整數。試求出所有滿足條件的數對$(a,b)$。

【參考解答】由題目可知$\sqrt{\frac{10}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{k}{2}$，其中$k$為整數。

設$\frac{15}{b}=\frac{q^2}{p^2}$且$p$與$q$為正整數且互質。可得$bq^2=15p^2$。故$q^2$為 15 的因數，可得$q=1$。

所以$\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{p}$。

同理$\sqrt{\frac{10}{a}}=\frac{1}{m}$，其中$m$為正整數。

因此$\sqrt{\frac{10}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{k}{2}$。

因$m\geq1$與$p\geq1$，可得$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{k}{2}\leq2$。故$1\leq k\leq4$。

若$k=1$，則$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$，可得$(m-2)(p-2)=4$。故$(m,p)=(4,4),(6,3),(3,6)$。

若$k=2$，則$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=1$，可得$(m-1)(p-1)=1$。故$(m,p)=(2,2)$。

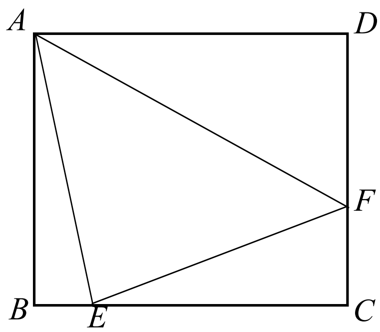
若$k=3$，則$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{3}{2}$，故$(m,p)=(2,1),(1,2)$。

若$k=4$，則$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=2$，故$(m,p)=(1,1)$。

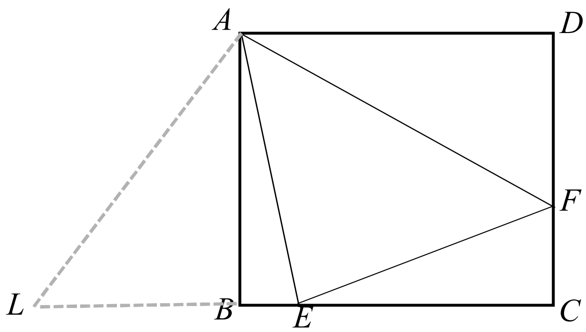
故滿足條件的(a,b)為

$(160,240),(360,135),(90,540),(40,60),(40,15),(10,60),(10,15)$。

3. 如圖所示，點 E 和點 F 分別是正方形 $ABCD$ 中 BC 邊和 CD 邊上的點，且 $\angle EAF = 45^\circ$，求 $\frac{EF}{AB}$ 的最小值。



【參考解答】



首先，先證明 $EF = BE + DF$。 延長 CB 至點 L，使 $BL = DF$，
則 $\mathrm{Rt}\triangle ABL \cong \mathrm{Rt}\triangle ADF$（SAS 全等），得 $LB = FD$， $AL = AF$，$\angle LAB = \angle FAD$。
又因 $\angle EAF = 45^\circ$，得 $\angle LAE = \angle LAB + \angle EAB = \angle FAD + \angle EAB = 45^\circ = \angle EAF$，
則$\triangle LAE \cong \triangle FAE$（SAS 全等），

故 $EF = LE = LB + BE = DF + BE$。
設 $EF = b$，$AB = a$，$BE = x$，
則 $DF = b - x$
$CF = DC - DF = a - (b - x) = a - b + x$。
由 $EF^2 = EC^2 + CF^2$ 得
$b^2 = (a - x)^2 + (a - b + x)^2$
則 $x^2 - bx + (a^2 - ab) = 0$
因為 BE 存在，所以 x 有實數解，則判別式 $\triangle = b^2 - 4(a^2 - ab) \geq 0$。
因為 $b > 0$，所以

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) - 1 \leq 0 \implies \frac{-\sqrt{2}+1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

因為 $\frac{a}{b} > 0$，故只取 $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$，則 $\frac{EF}{AB} = \frac{b}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2} - 2$，因此 $\frac{EF}{AB}$ 的最小值為 $2\sqrt{2} - 2$。