

高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

得 分 欄		1	2	3	4	5

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分, 共 200 分

1. 高雄市教育局舉辦活動, 接受人數不超過 1000 人的團體報名參加, 報名截止後, 承辦人發現這些團除人數均不一樣外, 而且有幾個團的人數很特別, 即該團的人數除以 7 餘 1, 除以 11 也餘 1, 且除以 15 後可化為有限小數, 請問這樣的團最多有幾個? 其人數分別為何?

(例如: 5, 7.2, 8.34 皆為有限小數, 而 $\frac{1}{3} = 0.33 \dots$ 則不是有限小數)

【參考解答】

設團的人數為 x

因為 x 除以 7 餘 1, 設 $x = 7k + 1$, 其中 k 為整數, 又因為 x 除以 11 餘 1, 所以 $(7k + 1) - 1$ 可被 11 整除, 因此 $k = 11n$, 其中 n 為整數,

也就是說 $x = 77n + 1$, 其中 n 為整數

而 $0 < x \leq 1000$, $0 \leq n \leq 12$ 。

因為 $15 = 3 \times 5$, 若 $\frac{x}{15}$ 可化為有限小數, 則 x 需為 3 的倍數

$$x = 77n + 1 = (3 \cdot 16 - 1)n + 1 = 3 \cdot 16n - n + 1$$

使得 $1 - n$ 可被 3 整除且 $0 \leq n \leq 12$, $n = 1, 4, 7, 10$ 。

這樣的團最多有 4 團, 而人數分別為 78, 309, 540, 771

高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號 _____

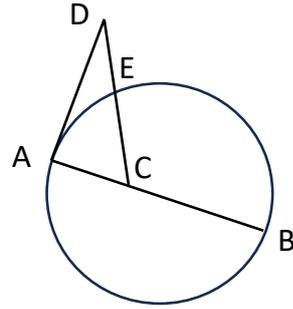
校名: _____

姓名: _____, _____, _____, _____

2. 如右圖， \overline{AB} 是圓 O 的直徑， \overline{AD} 切圓 O 於 A 點，

點 C 是 \overline{AB} 上一點，且 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 10$ 。

若點 E 是 \overline{CD} 和圓的交點，假設 $\overline{CE} : \overline{DE} = 2 : 1$ ，
則 \overline{CD} 的長度為多少？



【參考解答】

延長 \overline{DC} 交圓 O 於點 F ，連接 \overline{AF} 、 \overline{BF} 和 \overline{AE}

令 $\overline{AD} = x$ 、 $\overline{DE} = y$ 、 $\overline{CF} = z$ ，

則 $(3y)^2 = x^2 + 5^2$ ($\angle DAC = 90^\circ$)，

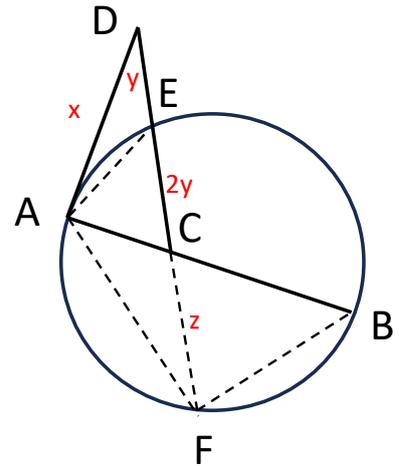
$x^2 = y(3y + z)$ ($\triangle AED \sim \triangle FAD$)

$5 \times 10 = z \times 2y$ ($\triangle ACE \sim \triangle BCF$) 則 $yz = 25$

可得 $9y^2 = x^2 + 25$ ，且 $x^2 = 3y^2 + 25$ 。

解得 $y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ，

所求 $\overline{CD} = 3y = 5\sqrt{3}$



高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

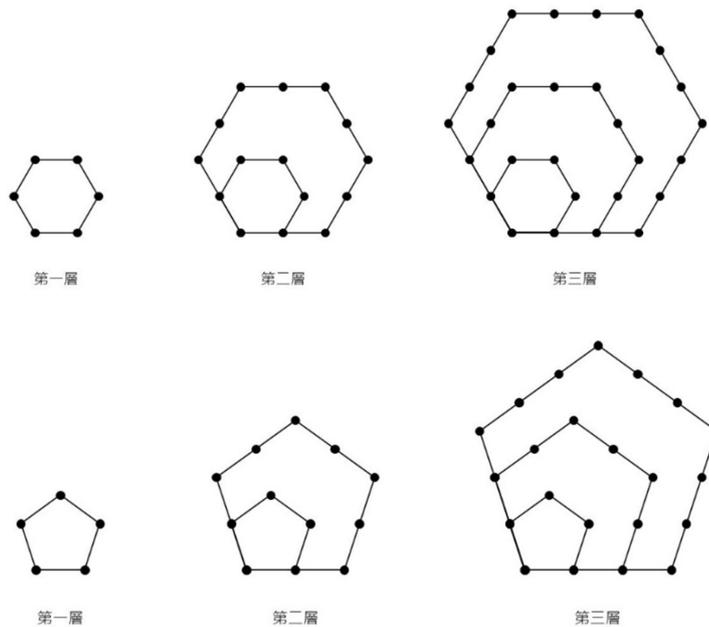
隊際賽試題

編號 _____

校名: _____

姓名: _____, _____, _____, _____

3. 已知有 m 根牙籤，欲將其排列成正五邊形或正六邊形陣列，其排列規則如下圖所示：



當排列成正五邊形時，恰好在第 n 層用完所有牙籤。然而，若是排成正六邊形時，發現排到第 n 層會不夠 36 根牙籤。試求數對 (m, n) 之值。

【參考解答】令 a_n 為排到第 n 層時所用的牙籤數。

以排列正五邊形來看： $a_1 = 5, a_2 = a_1 + 2a_1 - 2(2 - 1) = a_1 + 2a_1 - 2 \times 1,$

$a_3 = a_2 + 3a_1 - 2(3 - 1) = a_1 + 2a_1 + 3a_1 - 2 \times (1 + 2), \dots,$

$$a_n = (1 + 2 + \dots + n)a_1 - 2 \times (1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{n(3n+7)}{2}$$

以排列正六邊形來看： $a_1 = 6, a_2 = a_1 + 2a_1 - 2(2 - 1) = a_1 + 2a_1 - 2 \times 1,$

$a_3 = a_2 + 3a_1 - 2(3 - 1) = a_1 + 2a_1 + 3a_1 - 2 \times (1 + 2), \dots,$

$$a_n = (1 + 2 + \dots + n)a_1 - 2 \times (1 + 2 + \dots + n - 1) = 2n(n + 2)$$

根據題意可得 $2n(n + 2) - 36 = \frac{n(3n+7)}{2}$ ，則得 $4n(n + 2) - 72 = n(3n + 7)$

整理可得 $n^2 + n - 72 = 0$ ，則 $(n + 9)(n - 8) = 0$

所以 $n = 8$ ，而 $m = \frac{8(24+)}{2} = 124$ 即 $(m, n) = (124, 8)$

高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

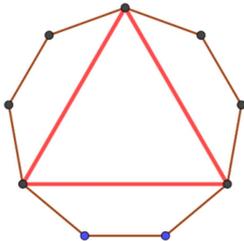
姓名:_____, _____, _____, _____

4. 從圓內接正九邊形的 9 個頂點中任取三個點構成三角形。若要求圓心落在三角形的內部，則滿足條件的三角形有多少個？

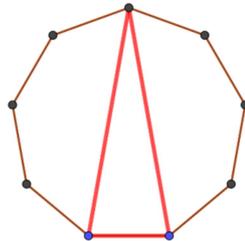
【參考解答】

因為重心在三角形的內部，所以必定為銳角三角形。

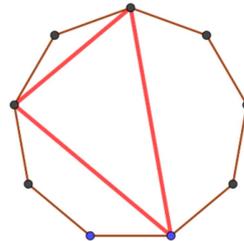
利用圓周角計算，可得出滿足條件的三角形只有三類。第一類有 3 個，第二類有 9 個，第三類左右翻轉各有 9 個。故滿足條件的三角形共有 30 個。



(一)



(二)



(三)

高雄市 113 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

5. 設 A 為正整數，而它的各個數字乘積恰等於 $\frac{27}{8}A - 229$ 。求 A 的值為多少？

【參考解答】設 $A = a_1 a_2 \cdots a_n$

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{27}{8}A - 229$$

$$\frac{27}{8}A - 229 > 0, A \geq 68。$$

$$A > a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{27}{8}A - 229, A \leq 97$$

又因為 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{27}{8}A - 229$ ，所以 8 為 A 的因數

所以 A 是偶數，故 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 為偶數，因此 16 不為 A 的因數
滿足上述條件為 72, 88

帶入原式得 $A = 72$ (因為 88 不滿足)