

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

得分欄		填充題	1	2	3

個人賽試題

_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

性別：☐男 ☐女

作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 小美從5月1日到5月30日考了好幾次數學，得到平均分數為84分，5月31日考了一次數學得98分，而5月份她考試的數學平均分數為86分，請問5月份小美共考了幾次數學？

_____7次_____

2. 假設 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 和 $x^2 + 2cx - b^2 = 0$ 有一相同非零實數解，且 a, b, c 是正數， $a \neq c$ ，試求以 a, b, c 為邊的三角形面積為何？

_____bc/2_____

3. $\frac{1^2}{1^2 - 40 + 800} + \frac{2^2}{2^2 - 80 + 800} + \cdots + \frac{38^2}{38^2 - 1520 + 800} + \frac{39^2}{39^2 - 1560 + 800} =$ _____39_____

4. 在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{CD} = a$, $\overline{BC} = b$, $a > b$ ，

點 E 為對角線 \overline{BD} 上一點且 \overline{CE} 垂直 \overline{BD} ，求 \overline{AE} 的長度 = $\frac{\sqrt{a^6 + b^6}}{a^2 + b^2}$

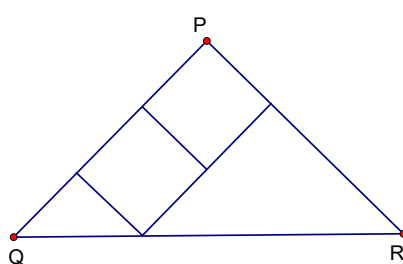
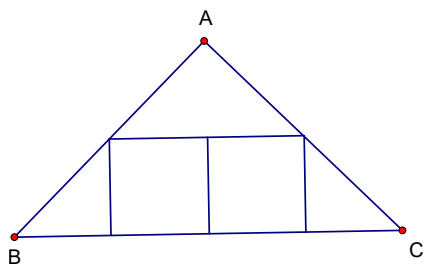
5. 設八位數 $N = 2ab9435c$ 且它是 792 的倍數，求 $a + b + c$ 的值 = _____13_____

6. 從正整數 1,2,3,...,110,111 中，任意選出三個數，使其成為等差數列的選取方法共有多少種？。 _____3025_____

7. 已知 a, b, c 均為整數，若 $|a - 3| + |b - 5| + |c - 7| = 2$ ，則滿足此式的所有可能 a, b, c 值中，試求 $a \times b \times c$ 的最小值和最大值之和為

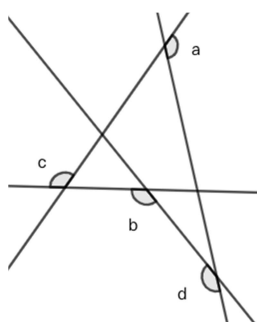
_____210_____

8. 已知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 皆為底邊長度等於1的直角等腰三角形，若分別在這兩個三角形內放置兩個全等的正方形，如下圖所顯示兩種不同的放法，則左圖中兩個正方形面積和與右圖中兩個正方形面積和之差為



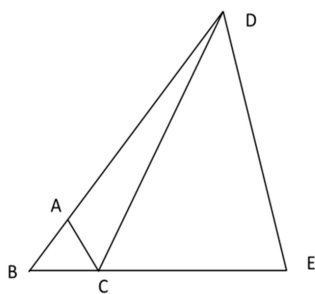
1/72

9. 如下圖，求角 a, b, c, d 的度數和為何？



540°

10. 如下圖， $\triangle ABC$ 為正三角形， D, E 兩點分別在 BA 與 BC 邊的延長線上。
 $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CE}$ ， $\angle BDC = 12^\circ$ ，求 $\angle CDE$ 的角度。



36°

11. 方程式 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ 有兩相異實根 x_1, x_2 ，上式中 m 為不小於-1的實數。求 $\frac{mx_1}{1-x_1} + \frac{mx_2}{1-x_2} - m^2$ 的最大值為何？

3

12. 已知 N 為介於4000與7000之間的正整數，在它的左邊寫上256後形成的七位數恰好為一個平方數。求 $N =$

6404

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a, b 為整數，若 $a + b$ 為 $x^2 + ax + b = 0$ 的一解，則所有可能的 (a, b) 為何？

【參考解答】

$$(a + b)^2 + a(a + b) + b = 0, \quad b^2 + (3a + 1)b + 2a^2 = 0$$

$$\text{由於 } a, b \text{ 為整數，} (3a + 1)^2 - 4 \times 2a^2 = a^2 + 6a + 1 = (a + 3)^2 - 8 = k^2$$

$$8 = (a + 3)^2 - k^2 = (a + 3 + k)(a + 3 - k)$$

不失一般性的，可令 k 為正整數。

$$8 = 8 \times 1 = 4 \times 2 = (-2) \times (-4) = (-1) \times (-8)$$

可得 $a = -6$ 或 0 ，因此 $(a, b) = (-6, 8), (-6, 9), (0, 0), (0, -1)$ ，共四組解。

2. 一個 2021 位數的正整數的首位數碼是 2，並且任何兩個相鄰的數碼所組成的兩位數一定是 17 或 23 的倍數。求這個數的個位數所有不同可能的值之和是多少？

【參考解答】

能被 17 整除的兩位數為 17, 34, 51, 68 和 85，能被 23 整除的兩位數為 23, 46, 69 和 92。所以這個數前幾個數碼只能是 2346。第五個數碼是 8 或 9。如果第五個數碼是 8，第五到第八個數碼必是 8517。因為沒有以 7 開頭的數，所以就停了。如果第五個數碼是 9，第五到第九個數碼必是 92346，又遇到了數碼 6。所以說接下來，若第 $5n$ 個數碼是 9，則 $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3$ 和 $5n+4$ 個數碼必是 92346 迴圈。若第 $5n$ 個數碼是 8，則 $5n, 5n+1, 5n+2$ 和 $5n+3$ 個數碼必是 8517。

因為 2021 除以 5 餘一，所以這個數的個位數只可能是 2 或 5。 $2+5=7$

3. 如下圖，在菱形 $ABCD$ 中， E 是 \overline{CD} 上的一點，連結 \overline{BE} 交 \overline{AC} 於 O ，連結 \overline{DO} 交 \overline{BC} 於 F 。將 \overline{AD} 、 \overline{BE} 分別延長交於點 N ，作 $\overline{EM} \parallel \overline{BC}$ 交 \overline{CN} 於 M ，再連結 \overline{FM} 。求證： $\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BN}}$

【參考解答】

因 \overline{AC} 是菱形 $ABCD$ 的對稱軸，所以

$$\angle BOC = \angle DOC, \quad \angle ACB = \angle ACD$$

因 $\angle BOF = \angle DOE$ ，所以 $\angle FOC = \angle EOC$ 。

又因 $\overline{OC} = \overline{OC}$ ，故可得

$$\triangle FOC \cong \triangle EOC。$$

由於 $\overline{CF} = \overline{CE}$ 且 $\overline{CB} = \overline{CD}$ ，

所以 $\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$ 。由 $\overline{EM} \parallel \overline{DN}$ ，得 $\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$ 。

由 $\overline{EM} \parallel \overline{BC}$ ，得 $\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BN}}$ ，即證得 $\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BN}}$ 。

