

# 高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

得分欄		填充題	1	2	3

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

性別：☐男 ☐女

作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1.  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2021}$  的個位數字為多少？ 3

2. 設  $x, y, z$  為正整數且同時滿足  $(x+y)(x+z) = 77$ ， $(x+y)(y+z) = 42$ ，求序對  $(x, y, z) = ?$  (6, 1, 5)

3. 若  $x$  滿足  $x^2 - 9x + 1 = 0$ ，試求  $x^4 + x^{-4}$  的值為多少？ 6239

4. 設  $a^2 + 2b^2 + c^2 + 2d^2 - ab - 2bc - cd - 2d + \frac{12}{17} = 0$ 。試求  $a =$  4/17

5. 已知四邊形  $ABCD$  的面積為 50，兩邊  $AB$ 、 $CD$  及對角線  $AC$  的長度皆為整數，且三者長度的和為 20。試問滿足此條件的不全等四邊形有幾個？ 5

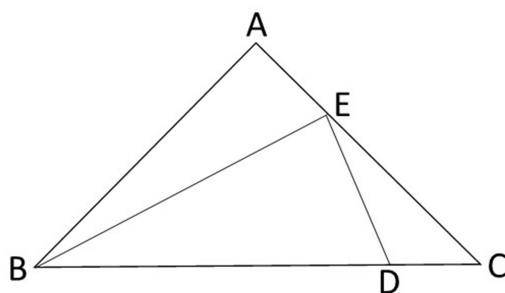
6. 若  $a, b, c, d$  為四個相異的質數，且  $d$  是一位數的質數。已知  $abc + d = 2020$ ，試求  $a + b + c + d$  的值為何？ 82

7. 設  $A$  為 101 位數的正整數， $A$  的前 50 個數字都為 2，後 50 個數字都為 3，即  $A = \overline{222 \dots 2x333 \dots 3}$ 。若  $A$  可以被 13 整除，求  $x =$  6

8. 某校在 2021 年的慈善捐款活動中，甲班的  $m$  個男生和 11 個女生的捐款總數與乙班的 9 個男生和  $n$  個女生的捐款總數相等，每班的捐款總數都是  $(mn + 9m + 11n + 145)$  元。已知每人的捐款數相同且都是整數元。若該校每班學生人數均少於 35 名，試求每人的捐款數為多少元？25

9. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 72^\circ$ ， $I$  是  $\triangle ABC$  的內心，若  $CA + AI = BC$ ，求  $\angle B$  的度數為何？36 度

10. 如下圖，在等腰直角  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ，點  $E$  在腰  $AC$  上，且  $AE = 1$ ， $EC = 2$ ，點  $D$  在底邊  $BC$  上，且  $DE \perp BE$ ，求  $\triangle CDE$  的面積為何？1/2



11. 六個人進行籃球傳球訓練，每人接到球後要傳給別人，開始時由甲將球傳給其他人。若 第六次傳球結束後，球在甲手上，試問共有多少種不同的傳球方式？2605

12. 若實數  $x, y$  滿足方程組 
$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{(5-x)(5-y)} = 4 \\ \sqrt{x(5-y)} + \sqrt{y(5-x)} = 5 \end{cases},$$
 求  $x^3 + y^3$  之值為何？65

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 從 0, 1, 2, 3, ..., 9 這 10 個阿拉伯數字中任意取出 3 個不同數字，形成一個從 102~987 的 3 的倍數的三位數，求所有這些三位數的總和為多少？

【參考解答】

將數分為 (i) {1, 4, 7}, (ii) {2, 5, 8}, (iii) {3, 6, 9}

- (1) 從 (i) (ii) (iii) 中均取出 3 個數
- (2) 從 (i) (ii) (iii) 中各取出 1 個數
- (3) 從 (i) (ii) 中各取出 1 個數配合 0
- (4) 從 (iii) 取出 2 個數配合 0

對於  $x, y, z$  三個數字的六種排列的數總和為

$$2(x + y + z) \times 111$$

$$(1) \quad 222[(1 + 4 + 7) + (2 + 5 + 8) + (3 + 6 + 9)] = 9990$$

$$(2) \quad 222[9 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 9)] = 89910$$

(3) 對於  $x, y, 0$  三個數字的四種排列的數總和為

$$2(x + y) \times 10^2 + (x + y) \times 10 + (x + y) = (x + y) \times 211$$

$$211[3 \times (1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8)] = 17091$$

$$(4) \quad 211[2(3 + 6 + 9)] = 7596$$

$$\text{所以 } 9990 + 89910 + 17091 + 7596 = 124587$$

2. 已知  $x$  是有理數，且  $4x^2 + 21x - 2$  的值恰好是兩個連續正偶數的乘積，試求出所有滿足條件的  $x$ 。

【參考解答】

假設兩個連續正偶數為  $k$  與  $k + 2$ 。

$$\text{由 } 4x^2 + 21x - 2 = k(k + 2) \text{ 可得 } 4x^2 + 21x - (k^2 + 2k + 2) = 0。$$

因  $x$  是有理數，故上述方程式有有理根，所以其判別式是完全平方數，設為  $n^2$ 。

$$\text{故 } \Delta = 21^2 + 16(k^2 + 2k + 2) = 457 + 16(k + 1)^2 = n^2 \geq 0$$

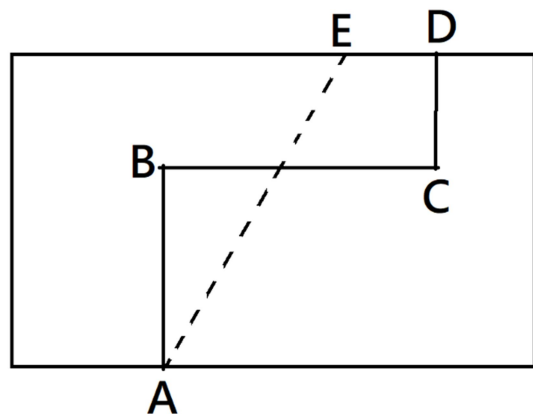
$$\text{整理可得 } n^2 - 16(k + 1)^2 = [n + 4(k + 1)][n - 4(k + 1)] = 457$$

因 457 為質數，故  $n + 4(k + 1) = 457$  且  $n - 4(k + 1) = 1$ 。

可得出  $n = 229$  及  $k = 56$ 。

$$\text{代入可得 } x = 26, -\frac{125}{4}。$$

3. 將一個長方形用折線 A-B-C-D 分成面積相等的兩塊(如右圖)。而折線 A-B-C-D 中的每一個線段都平行於長方形的邊。在長方形的邊上再取一點 E 使得線段 AE 平分長方形的面積。  
已知：線段  $AB = 40$ ， $BC = 90$ ， $CD = 20$ 。  
求 AE 的長。



【參考解答】

令線段 AE 交 BC 於點 M，過 E 點做 BC 的垂線，垂足為 P。

設  $ED = x$ ， $BM = y$ ，則  $MP = 90 - x - y$ ，

所以  $\triangle ABM$  的面積為  $20y$ ， $\square MCDE$  的面積為  $900 + 10x - 10y$ 。

由題意， $\triangle ABM$  跟  $\square MCDE$  的面積相等，所以

$$3y = 90 + x$$

又因為  $\triangle AMB$  跟  $\triangle EMP$  相似，

$$\text{所以 } \frac{40}{20} = \frac{y}{90 - x - y}$$

$$\text{得 } 3y = 180 - 2x$$

因此  $x = 30$

$$\begin{aligned} (AE)^2 &= (BP)^2 + (AB + CD)^2 \\ &= (BC - x)^2 + (AB + CD)^2 \\ &= (90 - 30)^2 + (60)^2 = 2 \times 60^2 \end{aligned}$$

$$AE = 60\sqrt{2}$$

