

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $M = 123^{456} + 456^{123}$ ，則 M 的個位數為_____。

ANS: 7

2. 若 p, q 為整數，且滿足 $\frac{127}{p} - \frac{18}{q} = 1$ 。則 q 的最大值為_____。

ANS: 2268

3. 設 a, b 均為整數且滿足 $a + b = 84 - 3ab$ ，令 $a + b$ 所有可能值之和為 S ，則 $S =$ _____。

ANS: 72

4. 已知數列 $\{5, 8, 11, \dots, 197, 200\}$ 為等差數列，若從此數列中任意選出 n 個不同的數，而該 n 個不同數中一定會存在某 6 個數 a, b, c, d, e, f 使得 $a + b = c + d = e + f = 208$ ，則 n 之最小值為_____。

ANS: 37

5. 已知 $x + y = 5$ ， $xy = 2$ ， $a + b = 3$ ， $ab = -1$ ，若 $m = ax + by$ ， $n = bx + ay$ 。則 $m^2 + n^2$ 的值為_____。

ANS: 223

6. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AC = 7$ ， D 為 AB 上一點且 $AD = BD = CD = 5$ ，則 $BC =$ _____。

ANS: $\sqrt{51}$

7. 設 $\triangle ABC$ 三個邊的邊長均為整數， M 為 AB 邊的中點，令 $p = AC + AM$ 、 $q = BC + BM$ ，若 $AB = AC$ ，且 $p : q = 5 : 2$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積最小值為_____。

ANS: $\frac{\sqrt{399}}{4}$

8. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， CA 平分 $\angle BCD$ ， E 為兩條對角線的交點；
若 $CD = AE$, $BC = DE$ ，則 $\angle ABC =$ _____。

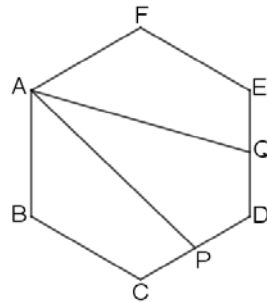
ANS: 126°

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 AD 為 $\angle BAC$ 的平分線， $AB = 10$, $AC = 12$, $AD = 8$ ， E 為 AC 上一點且 $AE = 2$ ，若 M, N 分別為 AE, BC 的中點；則 $MN =$ _____。

ANS: $\frac{22}{3}$

10. 已知正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 2，若 P, Q 分別為 CD, DE 兩邊的中點，則
四邊形 $APDQ$ 的面積為 _____。

ANS: $2\sqrt{3}$



11. 已知有 12 人參加象棋循環賽(賽制為任意兩人都必須比賽一次)，規定勝一局得 2 分，平手一局得 1 分，輸者不得分。若比賽結果是第二名的得分與最後 5 名的得分之和相同，則第二名得分為 _____。

ANS: 20

12. 設 a, b, c 為正整數，且 $a + b + c = 24$ ；若以 a, b, c 當成三角形的三邊長，共可得到 n 種不全等的三角形，則 $n =$ _____。

ANS: 12

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 N 為一個整數。若 N 加上 32 為一個整數的平方，而 N 加上 100 則為另一個整數的平方。試求 N 的所有可能值。

【參考解答】

可設 $N + 32 = x^2$ ， $N + 100 = y^2$ ，其中 x 與 y 皆為正整數。

$$\text{故 } y^2 - x^2 = 68 = (y - x)(y + x) = 2^2 \times 17。$$

因 $y - x$ 與 $y + x$ 為同奇或同偶，

故 $y - x$ 與 $y + x$ 皆為偶數。

可得 $y - x = 2$ 與 $y + x = 34$ 。

故 $y = 18$ 與 $x = 16$ 。

可解得 $N = 16^2 - 32 = 224$ 。

2. 設 a 為有理數，若 $(a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 的所有根均是整數，試求 a 的所有可能值。

【參考解答】： $a = 1$ ，則 $x = 1$ 。

$a \neq 1$ ，設 x_1, x_2 為方程式之二根

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a-1} = -1 - \frac{1}{a-1}$$

$$x_1 x_2 = \frac{2a-3}{a-1} = 2 - \frac{1}{a-1}$$

$$x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 3, (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 4; \quad a = 1 - \frac{1}{1 + x_1 + x_2}$$

(i) $x_1 - 1 = 1, x_2 - 1 = 4; x_1 = 2, x_2 = 5$

(ii) $x_1 - 1 = -1, x_2 - 1 = -4; x_1 = 0, x_2 = -3$

(iii) $x_1 - 1 = 2, x_2 - 1 = 2; x_1 = 3 = x_2$

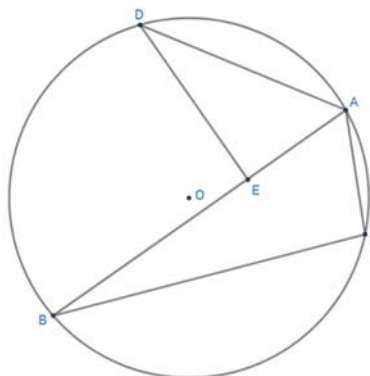
(iv) $x_1 - 1 = -2, x_2 - 1 = -2; x_1 = -1 = x_2$

$$a = \frac{7}{8}, a = \frac{3}{2}, a = \frac{6}{7}, a = 2 \text{ 及 } a = 1$$

3. 如下圖，已知圓 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓， $AB > AC$ ， $\angle BAC$ 的外角平分線交圓 O 於 D 點，

E 是 AB 上之點使得 $AE < BE$ 且 $DE \perp AB$ 。若 $AE = a$ ， $BE = b$ 且 $\angle BAC = 60^\circ$ ，試以

a 與 b 表示 $\triangle ABC$ 的面積。



【參考解答】：

在 BE 上取一點 F 使得 $\overline{EF} = \overline{AE} = a$

做射線 \overrightarrow{DF} 交圓 O 於 G 點

因為 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{EF} = \overline{AE}$

所以 $\triangle ADF$ 是等腰三角形

$\therefore \overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的外角平分線

$\therefore \angle ADF = 180^\circ - 2\angle DAF = \angle BAC$

故 弧 $AG =$ 弧 BC

\Rightarrow 弧 $AC =$ 弧 BG

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BG} \dots\dots\dots(1)$

又由 $\angle BGD = \angle BAD = \angle AFD = \angle BFG$

可得 $\overline{BG} = \overline{BF} \dots\dots\dots(2)$

故由 (1) 和 (2) 知 $\overline{AC} = \overline{BG} = \overline{BF} = b - a$

$\therefore \triangle ABC$ 中 \overline{AB} 邊上之高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} (b - a)$

$\therefore \triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \overline{AB} \times h = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 - a^2)$ ■

