

高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 設 AC 、 BC 為直角 $\triangle ABC$ 的兩個直角邊，若 AC 、 BC 長度之和為 a ，

M 是 AB 的中點，且 $MA = MB = 5$ ，問 a 的取值範圍為何？

【參考解答】 設 $AC = x$ 、 $BC = y$ ，則 $x + y = a > AB = 10$ 。

已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，推得

$$xy = \frac{1}{2} \left[(x+y)^2 - (x^2 + y^2) \right] = \frac{a^2 - 10^2}{2}$$

以 $y = a - x$ 代入上式得 $-x^2 + ax - \frac{a^2 - 10^2}{2} = 0$ 。

因 x 是一正實數，由判別式 $\Delta = a^2 - \frac{a^2 - 10^2}{2} \cdot 4 \geq 0$

得 $a \leq 10\sqrt{2}$ ，故 $10 < a \leq 10\sqrt{2}$ 。

高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

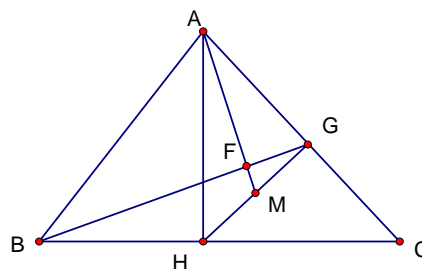
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B$ 、 $\angle C$ 為銳角， H 和 G 分別在 BC 邊和 AC 邊上，且 $AH \perp BC$ ， $HG \perp AC$ ， M 為 HG 的中點，若 AM 交 BG 於 F 點且 $AM \perp BG$ ，試證 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。



【參考解答】：

連接 HF ，由 $AH \perp BC$ ， $AM \perp BG$ ，知 A, B, H, F 四點共圓，

因此， $\angle ABH = \angle HFM$(1)

又由於 $\triangle AMG \sim \triangle GMF$

($\because \angle AGM = \angle GFM = 90^\circ$ 及 $\angle AMG = \angle GMF$)

而有 $FM:MG = MG:AM$ ，因 $HM = MG$

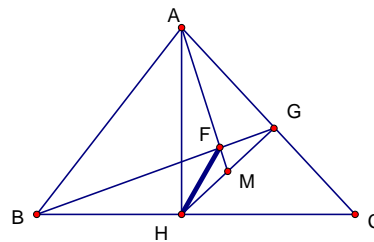
故 $FM:HM = HM:AM$ ，而有 $\triangle AMH \sim \triangle HMF$

可得 $\angle AHM = \angle HFM$(2)

又 $\angle AHM = \angle ACH$(3)

由(1), (2), (3)可得 $\angle ABH = \angle ACH$ ，即 $\angle B = \angle C$ ，

而證得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。



高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 設 x 、 y 、 z 為正整數，且 $3 \leq x \leq y \leq z$ ，求方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

的整數解。

【參考解答】

由 $z \geq 3$ 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} > \frac{1}{2}$ 。不失一般性，設 $x \leq y$ ，則

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{x}$ 推得 $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{2}$ ，即 $x \leq 4$ 。由題意知， $x \geq 3$ 故得 $x = 3, 4$ 。

當 $x = 3$ 時， $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ ；當 $x = 4$ 時， $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ 。所以滿足原方程式

的整數解為 $(x, y, z) = (3, 3, 6), (3, 4, 12), (3, 5, 30)$

高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. (a)試問能否將正整數 1 至 8 排在一個圓周上，使得每一個數字都被其相鄰的兩個數字的差所整除？如果可以，請在圓周上將這 8 個正整數排列出來；如果不可以，請說明理由。

(b)試問能否將正整數 1 至 10 排在一個圓周上，使得每一個數字都被其相鄰的兩個數字的差所整除？如果可以，請在圓周上將這 10 個正整數排列出來；如果不可以，請說明理由。

【參考解答】

(a) 將正整數 1 至 8 依 1, 7, 8, 5, 3, 2, 4, 6 的順序排在圓上即可。

(b) 不能。因奇數只能被奇數整除，故奇數只能跟一奇一偶的兩數相鄰，且有奇數出現時，必是偶、奇、奇、偶的形式出現，但 1 至 10 中有 5 個奇數，必有某個奇數無法以前述的形式出現。

高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 設 $m_1 = 10$, $m_2 = 15$, $m_3 = 20$, $m_4 = 35$, 若以 m_1, m_2, m_3, m_4 為四邊長度做出的梯形中, 其面積的最大值為 M , 面積的最小值為 m , 試求 $M - m$ 之值。

【參考解答】：因為 $10:15:20:35 = 2:3:4:7$

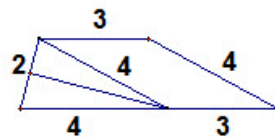
所以我們可以先以 2, 3, 4, 7 四數討論之

因為上底和下底的差與兩腰要可以組成三角形, 所以只有下列三種可能的情形: (上底, 下底, 腰, 腰) = (3, 7, 2, 4), (2, 7, 3, 4), (4, 7, 2, 3)。

(a) 如右圖, 若 (上底, 下底, 腰, 腰) = (3, 7, 2, 4)

$$\text{則梯形面積為 } \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} \times \frac{10}{4} = \frac{5\sqrt{15}}{2}$$

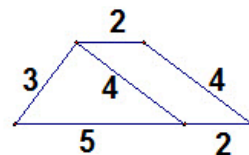
$$\text{故以原長度圍出梯形面積為 } \frac{5\sqrt{15}}{2} \times 25 = \frac{125\sqrt{15}}{2}$$



(b) 如右圖, 若 (上底, 下底, 腰, 腰) = (2, 7, 3, 4)

$$\text{則梯形面積為 } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{9}{5} = \frac{54}{5}$$

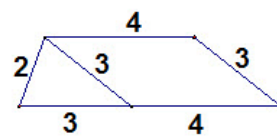
$$\text{故以原長度圍出梯形面積為 } \frac{54}{5} \times 25 = 270$$



(c) 如右圖, 若 (上底, 下底, 腰, 腰) = (4, 7, 2, 3)

$$\text{則梯形面積為 } \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{8} \times \frac{11}{3} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{故以原長度圍出梯形面積為 } \frac{22\sqrt{2}}{3} \times 25 = \frac{550\sqrt{2}}{3}$$



$$\text{因為 } 270 > \frac{550\sqrt{2}}{3} > \frac{125\sqrt{15}}{2},$$

$$\text{由上討論知梯形面積最大值和最小值之差為 } 270 - \frac{125\sqrt{15}}{2} = \frac{540 - 125\sqrt{15}}{2}$$