

# 高雄市 103 學年度國民中學數學競賽

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $A = \overline{a_1 a_2 a_3}$  為一正整數，且滿足  $5 \times \overline{4 a_1 a_2 a_3 1} = 9 \times \overline{2 a_1 a_2 a_3 5}$ ，  
則正整數  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 A : 499

2. 設  $B = 77^{33} + 33^{77}$ ，則  $B$  的最末一位數碼為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 A : 0

3. 已知三個正整數  $p$ 、 $q$ 、 $r$  之和為 237；且  $p$ 、 $q$ 、 $r$  分別除以 2、3、4 後，  
所得的商都相等，且餘數也都相等，若  $p < q < r$ ，則  $3p + 2q + r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
A : 422

4. 有五位同學到一家文具行買原子筆，該文具行所賣的原子筆有藍色和黑色；  
若每人只買一枝原子筆，而且至少有一位同學買了黑色原子筆，則五位同學  
可能的買法有幾種？ $\underline{\hspace{2cm}}$  A : 31

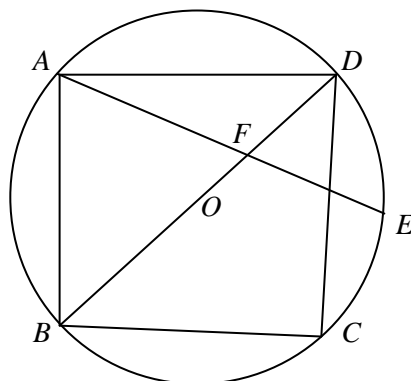
5. 烏龜、兔子各以其等速度同時同一地點按順時針方向繞圓形跑道賽跑，  
當兔子第三次追上烏龜時，立即轉身沿逆時針方向奔跑，當他們再次相  
遇時，此時烏龜恰好是第 10 次回到原出發點，若兔子跑步的速度是烏龜  
的  $k$  倍，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 A:  $\frac{1+\sqrt{31}}{5}$

6. 設  $S = p135q$  為一個五位數，若  $S$  為 72 的倍數，則  $p \times q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 A: 14

7. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $P$  點為  $\overline{BC}$  上的一動點且  $D$  點在  $\overline{AC}$   
上，滿足  $\overline{AD} : \overline{DC} = 7 : 3$ ，設  $r = \frac{\triangle CDP \text{面積}}{\triangle ABP \text{面積}}$ ，當  $P$  點在  $\overline{BC}$  上移動到使  
 $\overline{AP} + \overline{PD}$  的值最小時， $r$  的值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。  
A: 9/100

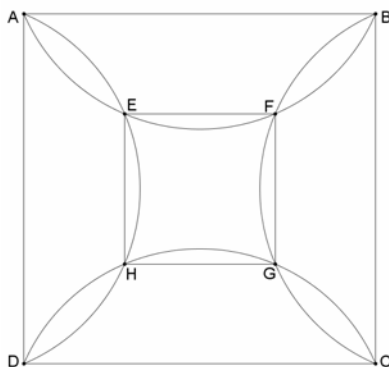
8. 如下圖，已知四邊形  $ABCD$  為圓  $O$  的內接正方形，正方形  $ABCD$  對角線  $BD$  為圓  $O$  的直徑，若  $AE$  和  $BD$  交於  $F$ ，且  $EF = 2FO$ ，則  $\left(\frac{DO}{FO}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

A:  $3 + 2\sqrt{3}$



9. 設  $m, n$  為方程式  $x^2 - 4x + 2 = 0$  兩個相異實根，若方程式  $x^2 + ax + b = 0$  的兩根為  $m^2 + n^2$  及  $m^3 + n^3$ ，則  $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 A: 428

10. 以四個相同  $120^\circ$  圓弧  $\widehat{AEB}$ 、 $\widehat{BFC}$ 、 $\widehat{CGD}$ 、 $\widehat{DHA}$  與一個正方形  $ABCD$  形成如下圖所示，若  $\overline{AB} = 2$ ，四個圓弧分別兩兩相交於  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  四個點，則四邊形  $EFGH$  所圍成面積為  $\underline{\hspace{2cm}}$  A:  $4/3$



11. 設  $a, b$  為實數，令  $T = a^2 + 2ab + 3b^2 - 4a - 12b$ ，則  $T$  的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 A: -12
12. 設  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$  為正整數且滿足  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{10}$ ，若  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq 2015$ ，則  $a_6 - a_3$  的最大值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

A: 14

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在正整數  $1, 2, 3, \dots, 200$  中，任取 101 個數，試證：在這 101 個數中，一定有兩個數，其中一個數是另一個數的倍數。

【參考解答】

建立下列 100 個抽屜

$\{1, 2, 4, 8, \dots, 128\}$ ， $\{3, 6, 12, \dots, 192\}$ ， $\{5, 10, 20, \dots, 160\}$ ， $\dots$ ， $\{99, 198\}$ ， $\{101\}$ ， $\{103\}$ ， $\dots$ ， $\{199\}$ 。

在  $1, 2, 3, \dots, 200$ ，中任取 101 個數，放入這 100 個抽屜中，

根據抽屜原理，一定有兩個數取自同一個抽屜，

他們一定滿足倍數關係，故得證。

2. 設  $a, b, c$  為整數，且  $b^2 - 4ac = 8$ ，若  $x_1, x_2$  為一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的兩個實根並滿足  $x_1 < 0, 2 < x_2$ ；試求  $2x_1 + x_2$  之值。

【參考解答】

可假設  $a$  為正數，此時  $C: y = ax^2 + bx + c$  的圖形為凹口向上的拋物線。

因兩實根一正一負，且點  $(0, c)$  在圖形  $C$  之上，可知  $c$  為負數。

因  $b^2 + 4a(-c) = 8$ ，且  $a, b, c$  都是整數。

可知  $a = 1, b = \pm 2, c = -1$  或  $b = 0, ac = -2$ 。

若  $b = 0, ac = -2$ ，可知兩根為  $\pm\sqrt{2}$ ，不合。

若  $a = 1, b = \pm 2, c = -1$ ，因點  $(1, a + b + c)$  在圖形  $C$  之上，

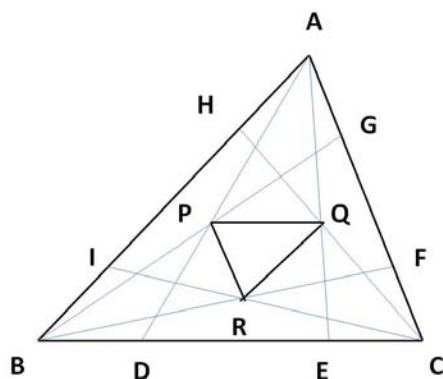
而兩實根有一正一負，可知  $a + b + c < 0$ 。

即  $b < 0$  而得  $b = -2$ 。可知兩根為  $x_1, x_2 = 1 \pm \sqrt{2}$ 。

求得  $2x_1 + x_2 = 3 - \sqrt{2}$

。

3. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中，設 $D$ 、 $E$ 在 $BC$ 邊上， $F$ 、 $G$ 在 $CA$ 邊上， $H$ 、 $I$ 在 $AB$ 邊上， $AD$ 與 $BG$ 交於 $P$ ， $AE$ 與 $CH$ 交於 $Q$ ， $BF$ 與 $CI$ 交於 $R$ ，若 $AH = BI = \frac{1}{4}AB$ ， $ED = CE = \frac{1}{4}BC$ ， $CF = AG = \frac{1}{4}AC$ ，試求 $\triangle PQR$ 面積與 $\triangle ABC$ 面積之比。



【參考解答】分別過 $D, C, A$ 作 $BG$ 垂線，垂足分別為 $K, L, M$ 如圖：

$$\frac{AP}{DP} = \frac{AM}{DK}, \frac{DK}{CL} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以，} \frac{AP}{DP} = \frac{AM}{(1/4)CL} = \frac{4AG}{CG} = \frac{4}{3}$$

分別過 $A, E, B$ 作 $CH$ 垂線，垂足分別為 $U, V, W$ 如圖：

$$\frac{AQ}{EQ} = \frac{AU}{EV}, \frac{EV}{BW} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以，} \frac{AQ}{EQ} = \frac{AU}{(1/4)BW} = \frac{4AH}{BH} = \frac{4}{3}。$$

所以， $AP:DP=AQ:EQ=4:3$ ， $PQ \parallel BC$ 。

同理， $PR \parallel AC$ ， $QR \parallel AB$ ， $\triangle ABC$ 相似 $\triangle PQR$ 。

$$\text{因為 } \frac{PQ}{BC} = \frac{PQ}{2DE} = \frac{1}{2} \left( \frac{AP}{AD} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{4+3} \right) = \frac{2}{7}$$

$$\text{所以 面積 } \frac{\triangle PQR}{\triangle ABC} = \left( \frac{2}{7} \right)^2 = \frac{4}{49}$$

