

高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

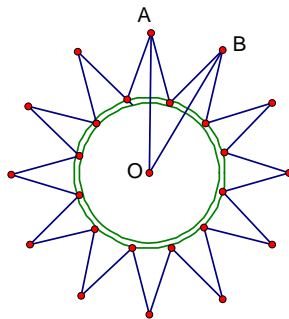
作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

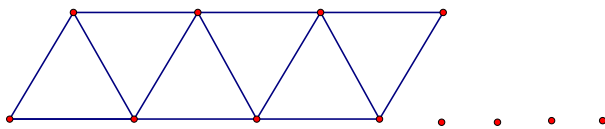
(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 我國的國旗上面有一個正十二角星，如下圖所示，從該星中心 O 到 A 與 B 之間的夾角 $\angle AOB$ 度數為_____。



答： 30

2. 按下圖中所示的方法繼續拚排火柴棒，那麼用 2013 支火柴棒共可拼出多少個三角形？_____



答： 1006

3. $3^{2012} + 7^{2013}$ 的個位數是_____。

答： 8

4. 在 3×3 的方格中各填入 1、3、5、7、9、11、13、15、17 九個不同的奇數，將每兩個有共同邊相接的格子內的數相加得到一個和，請問這些和最少有多少種不同的值？_____

答： 4

5. 已知 m 、 n 、 p 與 q 為4個不同的正整數且滿足 $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=4$ ，則 $7m+7n+7p+7q$ 的值為_____。

答： 196

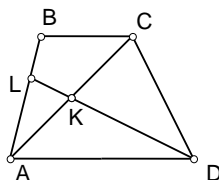
6. 今有一塊邊長為16單位的正三角形廣場，若用邊長為1單位的小正三角形磁磚來鋪蓋，試問共需要多少塊磁磚才能鋪蓋整個廣場？__

答： 256

7. 設 b 、 c 均為實數， a 為大於 b 及 c 的整數且滿足 $a+2b+3c=6$ 及 $abc=5$ ；在滿足此假設條件中，若 a 為最小值時，則 $a+b+c$ 的最大值為__。

答： $\frac{17}{2}$

8. 設梯形的面積為 x ，其上底與下底的比值為1:2，令 K 為對角線 AC 的中點， L 為直線 DK 與邊 AB 的交點，已知四邊形 $BCKL$ 的面積為8，則 x =_____。



答： 36

9. 設四邊形 $ABCD$ 是一個邊長為10的正方形， M 是 BC 邊上一點使得 $\overline{BM}=4$ 。今在 \overline{BD} 上取一 P 點使得 $\overline{PC}+\overline{PM}$ 之值最小，則 $\triangle ABP$ 面積為_____。

答： $\frac{100}{7}$

10. 設周長為2880公尺的正六邊形其六個頂點依順時針方向依序標記為 A, B, C, D, E, F ；若甲、乙二人分別從 A, E 兩點依順時針方向沿邊出發繞六邊形行走，甲的速度為每分鐘80公尺，乙的速度為每分鐘74公尺，問出發後甲、乙二人在幾分鐘後第一次在同一邊上行走？__。

答： 240

11. 設 x, y, z, a 均為實數且滿足 $xyz=\frac{a}{2}$ ， $x^2+y^2+z^2=a^2+6$ ， $x+y+z=a$ ，則

$\frac{1}{xy+az}+\frac{1}{yz+ax}+\frac{1}{zx+ay}$ 之值為_____。

答： $-\frac{4}{7}$

12. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 為十個由小到大排列的相異正整數，且 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 相加之總和為2013；試問 a_5 的最大值為多少？__

答： 331

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知 p, q 為質數且滿足： $p \mid (q + 17)$ 及 $q \mid (p + 23)$ 。試求滿足上述條件的所有數對 (p, q) 。

【參考解答】

若 $p=2$ ，則 $q=5$ ；若 $q=2$ ，則 $p=19$ 。

當 $p>2$ 且 $q>2$ 時，則 $q+17, p+23$ 均為偶數，所以

$$p \mid \frac{q+17}{2} \quad \text{且} \quad q \mid \frac{p+23}{2},$$

因此 $2p \leq q+17, 2q \leq p+23$ 進而 $p \leq 19, q \leq 21$ 。

逐一檢驗質數，可知 $p=3, q=13$ 符合題意，故答案共有三對

$(2, 5), (19, 2), (3, 13)$ 。

2. 在黑板上寫出 $1, 2, 3, \dots, n$ 一組連續正整數，然後擦去其中一個數，得到其餘數的平均值為 $33\frac{10}{13}$ 。問這一組數共有多少個並求出所擦去的數是哪一個？

【參考解答】

設在 $1, 2, 3, \dots, n$ 中擦去 k ，由於 $1 \leq k \leq n$ ，因此，

$$33\frac{10}{13} = \frac{1+2+\dots+n-k}{n-1} \geq \frac{1+2+\dots+n-n}{n-1} = \frac{n}{2} \dots\dots\dots(1)$$

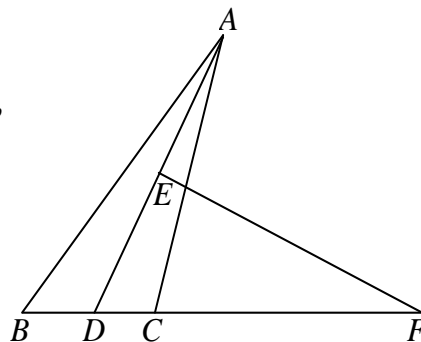
$$33\frac{10}{13} = \frac{1+2+\dots+n-k}{n-1} \leq \frac{1+2+\dots+n-1}{n-1} = \frac{n+2}{2} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{從(1), (2)可解得 } 67\frac{7}{13} > n > 65\frac{7}{13} \Rightarrow 67 \geq n \geq 66$$

因為 $n-1$ 為 13 的倍數，故 $n=66$ ，求得這一組數共有 66 個

$$\text{再由 } 33\frac{10}{13} = \frac{1+2+\dots+66-k}{65}; \text{解得 } k=16, \text{即擦去的數為 } 16.$$

3. 如右圖， \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的角平分線，
 \overline{EF} 是 \overline{AD} 的垂線平分線，若 $\overline{BC} : \overline{CF} = 1 : 2$ ，
 試求 $\frac{\Delta ACD \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$ 之值。



【參考解答】

連結 \overline{AF} ，

因為 \overline{EF} 是 \overline{AD} 的垂線平分線，所以 $\overline{AF} = \overline{FD}$

$$\therefore \angle 4 = \angle 2 + \angle 3,$$

$$\text{但 } \angle 4 = \angle B + \angle 1$$

$$\therefore \angle 3 = \angle B$$

因為 $\angle AFD$ 是公共角，

所以 $\Delta ABF \sim \Delta CAF$ (AA 相似)

$$\text{故 } \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$$

$$\text{設 } \overline{BC} = x, \overline{CF} = 2x, x > 0$$

$$\Rightarrow \overline{AF}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = 3x \cdot 2x = 6x^2$$

$$\therefore \overline{FD} = \overline{AF} = \sqrt{6}x$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{FD} - \overline{FC} = \sqrt{6}x - 2x = (\sqrt{6} - 2)x$$

$$\text{故 } \frac{\Delta ACD \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{(\sqrt{6} - 2)x}{x} = \sqrt{6} - 2$$

