

高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 設 a 與 b 為兩個正整數，試證 $a^2 + a + b$ 與 $b^2 + b + a$ 不能同時為平方數。

【參考解答】：

利用反證法

設 $a^2 + a + b$ 與 $b^2 + a + b$ 皆為平方數，則

$$a^2 + a + b \geq (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 \text{ -----(1)}$$

$$b^2 + a + b \geq (b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 \text{ -----(2)}$$

(1) + (2) 得

$$a^2 + b^2 + 2a + 2b \geq a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2, \text{ 矛盾！}$$

高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. A、B、C、D、E 五人參加一次考試，試題共有七道，都是是非題，評分標準為：對於每道題，答對得 1 分，答錯扣 1 分，不回答的不得分也不扣分。記錄表中呈現的是 A、B、C、D、E 五個人做的答案，現已知考生 A、B、C、D 各得 2 分，問：考生 E 應得多少分？而題號 1~7 各題的正確答案應該是什麼？

考生 題號	A	B	C	D	E
1	○	○		×	○
2		×	○	×	○
3	×	○	×	×	×
4	○	○	×	○	
5	×	×	○	○	○
6	○	×	×		×
7	○		○	×	○

【參考解答】：

設 $x_k = 1$, 表示第 k 題答對; $x_k = -1$, 表示第 k 題答錯, 其中 $k=1, 2, \dots, 7$.

於是考生答 "○" 得 x_k ; 而考生答 "×" 得 $-x_k$;

由於考生 A, B, C, D 各得 2 分, 得方程組:

$$x_1 + 0 \times x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 = 2 \cdots \cdots (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + 0 \times x_7 = 2 \cdots \cdots (2)$$

$$0 \times x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 2 \cdots \cdots (3)$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 0 \times x_6 - x_7 = 2 \cdots \cdots (4)$$

將方程(1)+(2)+(3)+(4)得

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_6 + x_7 = 8. \text{ 其中 } x_i = \pm 1 (i=1, 2, \dots, 7)$$

上式左邊小於或等於 8, 但右邊是 8. 故 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1, x_6 = -1, x_7 = 1$.

將這些結果代入(1)得 $x_5 = 1$.

故 1, 4, 5, 7 題的答案為 "○"; 而 2, 3, 6 題的答案為 "×"

因此, E 的的分為 4 分.

高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

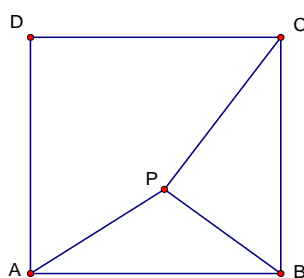
編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 設 P 為正方形 $ABCD$ 內的一點，若 $PA^2 + PC^2 = 2PB^2$ ，

試證點 P 必落在對角線 AC 上。



【參考解答】：

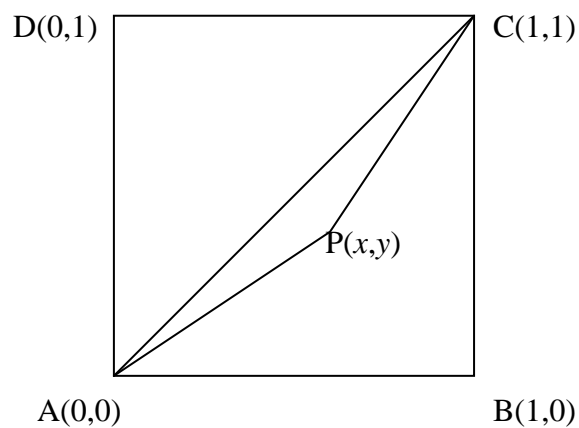
令 P 點的座標及其他點的座標如右圖

$PA^2 + PC^2 = 2PB^2$ ，因此

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ = 2[(x-1)^2 + y^2] \end{aligned}$$

得 $x = y$

故點 P 必落在對角線 AC 上



高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 設 $n_1, n_2, \dots, n_{2012}$ 是整數，且滿足下列條件：

(1) $-1 \leq n_k \leq 2$ (其中 $k = 1, 2, \dots, 2012$)

(2) $n_1 + n_2 + \dots + n_{2012} = 400$

(3) $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{2012}^2 = 2012$

試求 $n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{2012}^3$ 的最小值和最大值。

【參考解答】：

假設 $n_1, n_2, \dots, n_{2012}$ 中有 p 個 0, q 個 -1, r 個 1, s 個 2. 則有

$$-q + r + 2s = 400 \cdots (1)$$

$$q + r + 4s = 2012 \cdots (2)$$

(1)+(2)得

$$2r + 6s = 2412 \Rightarrow r + 3s = 1206$$

故 $0 \leq s \leq 402$

$$\text{由 } n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{2012}^3 = -q + r + 8s = 6s + 400$$

$$\text{得 } 400 \leq n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{2012}^3 \leq 6 \times 402 + 400 = 2812$$

由(1)及(2)知：當 $s=0, r=1206$ 時， $n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{2012}^3$ 取最小值 400；

當 $s=402, r=0$ 時， $n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_{2012}^3$ 取最大值 2812.

高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 在下面 3×3 的九宮格內，能否將九個不同的數字 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 分別填入不同的小方格中，使得每行、每列及兩個對角線的三個數字乘積都相同；如果可以，請將正確的數字填入九宮格內；如果不可以，請說明理由。

【參考解答】：

可以，九宮格內符合條件的數字如下(答案之一)

2	9	12
36	6	1
3	4	18