

高雄市 97 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 若 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2008}{2009!} = \frac{n}{m}$ ，試求 $m-n$ 之值。
(式中 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ ， n 為正整數)

【參考解答】

$$\because \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2008}{2009!} = \sum_{k=1}^{2008} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{2008} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = 1 - \frac{1}{2009!} = \frac{2009!-1}{2009!}$$

$$\therefore m - n = 1$$

2. 小傑在 $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ 這 200 個數中，先將這些數中是 2 的倍數除以 2 之後，再將這些數中是 3 的倍數除以 3。經過這兩次的運算後，這 200 個數的總和是多少？

【參考解答】

(作法一)

$$\begin{aligned} & \{全部數的和\} - \frac{1}{2} \{2 \text{ 的倍數的和}\} - \frac{2}{3} \{3 \text{ 的倍數的和}\} + \frac{1}{3} \{6 \text{ 的倍數的和}\} \\ &= \frac{(1+200) \times 200}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(2+200) \times 100}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{(3+198) \times 66}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{(6+198) \times 33}{2} \\ &= 11750 \end{aligned}$$

(作法二)

將 $T = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ 分成 A 和 B,

其中 $A = \{1, 3, \dots, 199\}$ 含 T 中的奇數, $B = \{2, 4, \dots, 200\}$ 含 T 中的偶數。

B 中之數除以 2 為 $B' = \{1, 2, \dots, 100\}$ 也就是將 T 中之數除以 2 之後成為 A 和 B' 的聯集。

再把 A 分成 C 和 D, C 中之數是奇數但不是 3 的倍數, D 中之數是奇數且是 3 的倍數。

A 中所有數之和為 $(1 + 199) \times 100 / 2 = 10000$

C 中所有數之和 = A 之和 扣除 3 的倍數的和

= A 之和 扣除 (T 中 3 的倍數 - T 中 6 的倍數)

$$= 10000 - [(3 + 198) \times 66 / 2 - (6 + 198) \times 33 / 2]$$

$$= 10000 - [201 \times 33 - 102 \times 33] = 10000 - 99 \times 33 = 10000 - 100 \times 33 + 33$$

$$= 10000 - 3300 + 33 = 6733$$

D 中所有數之和除以 3 成 $D' = \{1, 3, 5, \dots, 65\}$, 其和為 $(1+65) \times 33 / 2 = 33 \times 33 = 1089$

把 B' 分成 E 和 F, 其中 E 是 B' 中非 3 的倍數, $F = \{3, 6, \dots, 99\}$ 是 B' 中 3 的倍數。

E 中所有數之和 = B' 之和 扣除 F 之和 = $(1+100) \times 100 / 2 - (3+99) \times 33 / 2 = 5050 - 51 \times 33 = 5050 - 1683 = 3367$

F 中之數除以 3 成 $F' = \{1, 2, 3, \dots, 33\}$, 其和為 $(1+33) \times 33 / 2 = 17 \times 33 = 561$

兩次的運算後，這 200 個數的總和是

$$C \text{ 之和} + E \text{ 之和} + D' \text{ 之和} + F' \text{ 之和} = 6733 + 3367 + 1089 + 561 = 11750$$

3. 長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AD}=60$ ， $\overline{AB}=45$ ， N 為 \overline{CD} 邊之中點，在 \overline{BC} 邊上取一點 P 作 $\triangle APN$ ，使其面積不超過 900 且點 P 儘可能靠近點 B ，試求 \overline{BP} 。

【參考解答】設 $\overline{BP}=x$ ， $\overline{PC}=60-x$

$$60 \times 45 - \frac{1}{2} \times 45 \times x - \frac{1}{2} \times \frac{45}{2} \times (60-x) - \frac{1}{2} \times 60 \times \frac{45}{2} \leq 900$$

$$2700 - \frac{45}{2}x - \frac{45}{4} \times 60 + \frac{45}{4}x - 675 \leq 900 \Rightarrow \frac{-45}{4}x \leq -4500 \Rightarrow x \geq 40$$

故 $\overline{BP}=40$ 。

4. 已知 $(a, b) = 1$, 若 $\frac{a-b}{a^2+3ab+b^2} = \frac{2}{59}$, 求 a 和 b 之值。

【參考解答】

$$a^2 + 3ab + b^2 = (a-b)^2 + 5ab$$

因為可證得 $d = ((a-b), (a-b)^2 + 5ab) = 1$ or 5

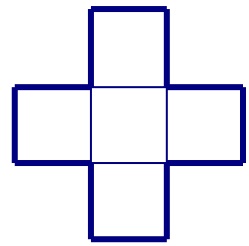
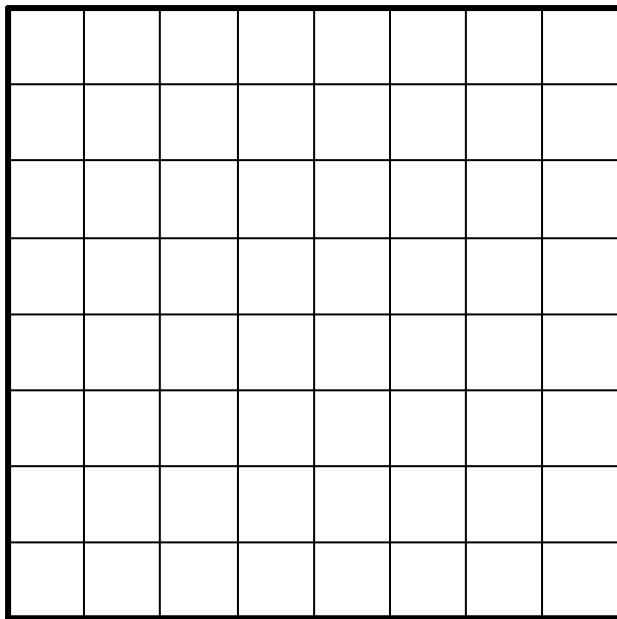
(i) $d = 1$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+3ab+b^2=59 \end{cases} \quad \text{無解}$$

(ii) $d = 5$

$$\begin{cases} a-b=10 \\ a^2+3ab+b^2=59 \times 5 \end{cases} \quad \therefore a=13, \quad b=3$$

5. 在下面 8×8 棋盤中，問最少要挖去幾個小方格才能使得連一片五方格(如右圖)都放不進去。請在棋盤中要挖去的小方格塗色。



【參考解答】

答案：至少 10 片。

