高雄市 114 學年度國民中學數學競賽

得分欄		填充題	1	2	3

個人賽試題

__________國民中學_____年級　編號：__________　姓名：___________

性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 x, y 均為非負整數且滿足$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{11300}$，求滿足上式的$x+y$共有多少個不同的值? ______6 個______

2. 若數$(3630)_p$能被 7 整除，求所有符合條件的 p 值為何? $7k$ 或 $7k$-1 (k 為正整數)
（例如:$(1011)_2=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$；
$(310)_5=3\times5^2+1\times5^1+0\times5^0$）

3. 假設 x 的方程式$x^2+tx-3=0$ 和$x^2-4x-(t-1)=0$ 有一個相同的根，則此根為何值? ______3______

4. 有一個2026個數的數列，首項為1，除了首項和末項外，每項之值等於其前後項之和，試求此數列末項的值為何? ______-1______

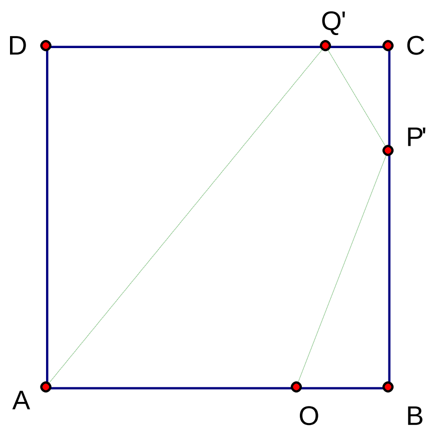
5. 高雄市某國中有 65 位學生參加教育局舉辦的 A, B, C, D 四種項目競賽，其中有 45 人參加 A 項目，48 人參加 B 項目，52 人參加 C 項目，55 人參加 D 項目，問至少有幾個人四個項目均參加? ______5 人______

6. 設m為整數，且$12<m<40$，若方程式$x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$有兩個整數根，求 m 之值 ______24______

7. 已知$2026<n<2030$，設$M=2021^n+2022^n+2023^n+2024^n+2025^n$，若$n$滿足$M$能被 5 整除，求 n 之值? ______2027 或 2029______

8. 設 x, y, z 為正數，且$xyz(x+y+z)=196$，
求$(x+y)(y+z)$的最小值為何？ ______28______

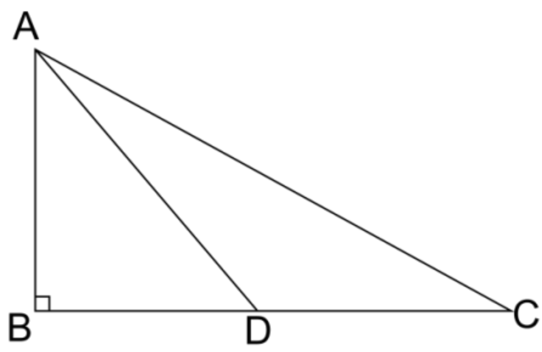
9. 如圖所示，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 6，
點 O 在$\overline{AB}$邊上，且$\overline{OB}=2$，若P', Q'分別為$\overline{BC}$,
$\overline{CD}$上的動點，但不在這兩邊的端點位置，
求四邊形$AOP'Q'$的最短周長為何？ ______$4+4\sqrt{13}$______



10. 直角三角形ABC的三個頂點A、B與C均在二次函數$y=kx^2$
的圖形上，已知k為正數，且斜邊$\overline{AB}$與 X 軸平行。
試求斜邊$\overline{AB}$上的高h之值(答案以 k 的形式表之)。 ______$1/k$______

11. 如果把數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 各用一次, 組成兩個三位數
m 和 n, 求 $m\times(n+70)$之最大值為何？ ______386172______

12. 如圖所示，直角三角形ABC，已知$\overline{BD}=14$，
$\overline{CD}=16$，且$2\angle ADB=3\angle ACB$， 試求$\triangle ACD$之面積。 ______$80\sqrt{7}$______



第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

（注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由）

1. 設a、b與c均為任意數(正數、負數或零)，已知$abc=21$，$a(b+1)(c+1)=45$及$a(b+2)(c+2)=77$。試求出$a(b-1)(c-1)$的值。

【參考解答】由$a(b+1)(c+1)=45=abc+a(b+c+1)$，可知$a(b+c+1)=24$。
由$a(b+2)(c+2)=77=abc+a(2b+2c+4)$，可知$a(2b+2c+4)=56$，即$a(b+c+2)=28$。
因$28=a(b+c+2)=a(b+c+1)+a=24+a$，可得$a=4$。
以及$b+c=5$。
設$k=a(b-1)(c-1)$。
因$a(b-1)(c-1)=k=abc-a(b+c-1)$，可知$a(b+c-1)=21-k$。
由$a=4$及$b+c=5$，可得$21-k=16$。即$k=5$。

2. 設a、b是方程式$x^2-3x-5=0$的兩根，c、d是方程式$x^2-2x-2=0$的兩根，則

$$\frac{25a-a^3}{b+c+d}+\frac{25b-b^3}{a+c+d}+\frac{25c-c^3}{a+b+d}+\frac{25d-d^3}{a+b+c}$$

之值為何？

【參考解答】

因為 $a+b=3, ab=-5, c+d=2, cd=-2$

所以 $a+b+c+d=5, b+c+d=5-a, a+c+d=5-b,$

$a+b+d=5-c, a+b+c=5-d$

求值式$=\frac{-a(a^2-25)}{5-a}+\frac{-b(b^2-25)}{5-b}+\frac{-c(c^2-25)}{5-c}+\frac{-d(d^2-25)}{5-d}$

$=\frac{a(a+5)(5-a)}{5-a}+\frac{b(b+5)(5-b)}{5-b}+\frac{c(c+5)(5-c)}{5-c}+\frac{d(d+5)(5-d)}{5-d}$

$=a(a+5)+b(b+5)+c(c+5)+d(d+5)$

$=a^2+5a+b^2+5b+c^2+5c+d^2+5d$

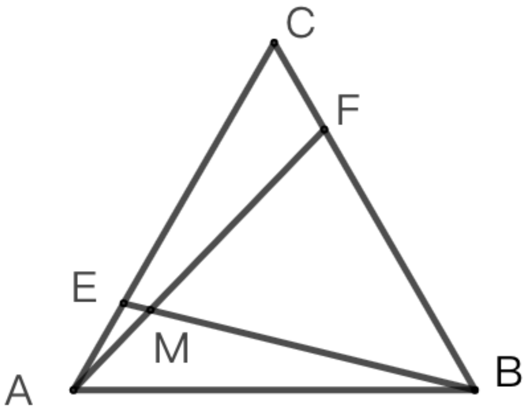
$=a^2+b^2+c^2+d^2+5(a+b+c+d)$

$=(a+b)^2-2ab+(c+d)^2-2cd+5(a+b+c+d)$

$=9+10+4+4+25=52$

3. 設ΔABC為正三角形，點 E, F 分別在$\overline{AC}$, $\overline{BC}$上，且$\overline{AE}=\overline{CF}$。設$\overline{AF}$與$\overline{BE}$相交於點 M。

證明：$\overline{AM}+\frac{1}{2}\overline{BM}<\overline{AC}$



【參考解答】

由於$\overline{AE}$=$\overline{CF}$，且三角形 ABC 為正三角形，

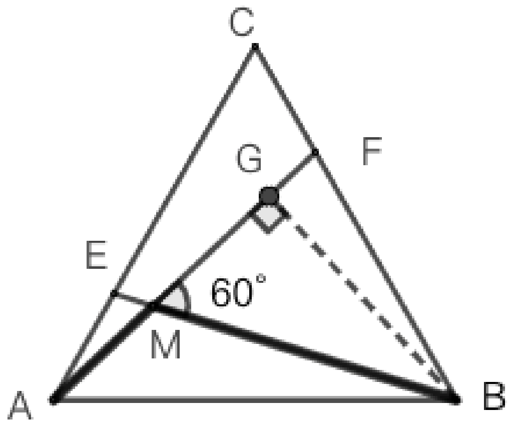
所以$\Delta ABE\cong\Delta CAF$，$\angle BEA=\angle AFC$

因此$\angle MAE+\angle MEA=\angle FAC+\angle BEA$

$$=\angle FAC+\angle AFC$$
$$=180^0-\angle ACF=120^0$$

由三角形 AME 的內角和可知，

$$\angle AME=60^0=\angle BMF$$



由點 B 做$\overline{AF}$的垂線，垂足為點 G。

由角度 30 – 60 – 90 可知，$\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{BM}$

所以$\overline{AM}$+$\frac{1}{2}\overline{BM}=\overline{AG}$ 。又因為三角形 ABG 為直角三角形其斜邊為$\overline{AB}$，$\overline{AG}$<$\overline{AB}$，

因此 $\overline{AM}$+$\frac{1}{2}\overline{BM}=\overline{AG}$<$\overline{AB}=\overline{AC}$（$\Delta ABC$為正三角形）。

所以 $\overline{AM}+\frac{1}{2}\overline{BM}<\overline{AC}$。