高雄市 114 學年度國民中學數學競賽

得分欄		1	2	3	4	5

合作解題賽試題

學 校 編 號________________　　　　　　校 名:__________________

姓 名:____________, ______________, ______________, ______________

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分（**注意：須詳列過程及說明理由**）

1. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形經過 $A(-1,0)$、$B(2,0)$、$C(0,2)$ 三點，
   (1) (15%) 求此二次函數為何?
   (2) (25%) 若點P是第一象限內此二次函數圖形上的一個動點，移動P點使得四邊形$ABPC$的面積最大，求此時面積的大小及 P 點座標?

【參考解答】

(1) 因為此二次函數圖形交x軸於$A(-1,0)$、$B(2,0)$兩點，設 $y = a(x+1)(x-2)$，
代入點$C(0,2)$，可得 $a = -1$，
所以二次函數為 $y = -(x+1)(x-2) = -x^2 + x + 2$。

(2) 連接OP，設點P的座標為 $(x, -x^2 + x + 2)$，$x > 0$
由於 $S_{\triangle AOC} = 1$、$S_{\triangle POC} = x$、$S_{\triangle POB} = -x^2 + x + 2$，所以

$$S_{四邊形ABPC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle POC} + S_{\triangle POB} = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$$

因此當$x = 1$時，四邊形$ABPC$的面積最大，最大值為 4，此時 $P(1,2)$。

高雄市114學年度國民中學數學競賽

合作解題賽試題

學 校 編 號________________　　　　　校 名:__________________

姓 名:____________, ______________, ______________, ______________

（注意：須詳列過程及說明理由）

2. 下表為一個3000×3000的表格，且每一直行和每一橫列中的數字皆各 自形成等差數列，若在此表格中，數字4601出現在對角線格子上的次數為A、出現在對角線以上的格子次數為B，求數對(A,B)。

1	5	9	13	17	⋯
5	11	17	23	29	⋯
9	17	25	33	41	⋯
13	23	33	43	53	⋯
17	29	41	53	65	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

【參考解答】

設a_{mn}表示位在第m列，第n行的數字。

觀察表格可知第m列的第一個數字為$a_{m1}=1+(m-1)\times 4=4m-3$

又第m列的公差為$2(m+1)$，所以

$$a_{mn}=(4m-3)+2(n-1)(m+1)=2(m+1)(n+1)-7$$

令$a_{mn}=4601$，$2(m+1)(n+1)-7=4601$，

$$(m+1)(n+1)=2304=2^8\times 3^2$$

(1) 對角線由左上角至右下角

$m+1$	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$n+1$	2304	1152	768	576	384	288	256	192	144

$m+1$	18	24	32	36	48
$n+1$	128	96	72	64	48

因為$m+1\geq 2$，所以出現在對角線上的次數$A=1$，出現在對角線以上的次數$B=12$，所以$(A,B)=(1,12)$

(2) 對角線由右上角至右左下角

對角線: $m+n=3001$，此對角線上的值不會出現 4601，所以$A=0$

因為此表格有對稱性，所以根據(1)的結果可知在此對角線以上會出現 25 次，故$B=25$。所以$(A,B)=(0,25)$

(3) 兩對角線(由左上角至右下角、由右上角至右左下角)

4601 出現在對角線只有$a_{47,47}$，所以$A=1$

在對角線以上同(1)。所以$(A,B)=(1,12)$

高雄市 114 學年度國民中學數學競賽

合作解題賽試題

學 校 編 號_______________　　　　　校 名:_________________

姓 名:____________, ______________, ______________, ______________

(注意：須詳列過程及說明理由)

3. 高雄市教育局舉辦一個含有數個項目的競賽，甲、乙、丙三人同時參加此競賽，在每一個別項目的競賽中三人的成績恰好均為三個相異的正整數 a, b, c (舉例而言:在項目 1 中，甲得 a、乙得 b、丙得 c；在項目 2 中，甲得 c、乙得 a、丙得 b；…….)。已知最後成績總和甲得 19 分、乙得 11 分、丙得 9 分；假設在某項目中丙的成績為第一名，求在此項目中誰得第二名?

【參考解答】設$a > b > c \geq 1$，此次考試共考 N 個科目

$N(a+b+c) = 19+11+9$

$a+b+c \geq 3+2+1 = 6$，所以$N \leq 6$，又N可整除 39，

所以 $N = 3$，$a+b+c = 13$

$(a, b, c) = (10, 2, 1), (9, 3, 1), (8, 4, 1), (8, 3, 2), (7, 5, 1), (7, 4, 2), (6, 5, 2), (6, 4, 3)$

因為甲得 19 分，故可能情形為 (9, 3, 1), (8, 3, 2), (7, 5, 1)

(i) (9, 3, 1): 甲 (9, 9, 1)；乙 (9, 1, 1)；丙 無解

(ii) (8, 3, 2): 甲 (8, 8, 3)；乙 無解

(iii) (7, 5, 1): 甲 (7, 7, 5)；乙 (5, 5, 1)；丙 (7, 1, 1)

P: 甲(5)、乙(1)、丙(7)；故甲得第二名

其他二項目: 甲(7)、乙(5)、丙(1)

甲(7)、乙(5)、丙(1)

高雄市114學年度國民中學數學競賽

合作解題賽試題

學 校 編 號_______________　　　　　校 名:_________________

姓 名:____________, ______________, ______________, ______________

（注意：須詳列過程及說明理由）

4. 國王邀請了編號 1 到 50 的 50 位騎士參加宴會。如果騎士 A 和騎士 B 同時出席（A、B 不同人），且他們的編號相加剛好等於在場的騎士 C 的編號，那麼 C 就會覺得 A 和 B 在說他壞話，進而引發爭吵。為了讓宴會和平進行（即不發生爭吵），國王最多可以邀請多少位騎士出席？

【參考解答】

1. 若是選擇編號為$\{25, 26, \ldots, 50\}$這 26 位騎士，由於任兩位的編號相加都超過 50，所以不會引發爭吵。
2. 現在證明不可能選擇超過 26 位騎士。首先假設被邀請的騎士中編號最大的是 M 號。那麼我們知道在$(1, M-1)$ 這對騎士中最多只能邀請一位。同理，$(2, M-2), (3, M-3), (4, M-4), \ldots$ 中，每對也最多只能被邀請一位。每對也最多只能被邀請一位。也就是說，全部最多只能邀請$\frac{M-1}{2}+1$(含編號 M 的那位位騎士)。

   當然，M 取愈大出席人數愈多，故取 50；而$\frac{50-1}{2}=24.5$，即以上面的分法，每組有兩人，但其中一組有一人，所以$25+1=26$，最多有 26 位騎士出席。

高雄市 114 學年度國民中學數學競賽

合作解題賽試題

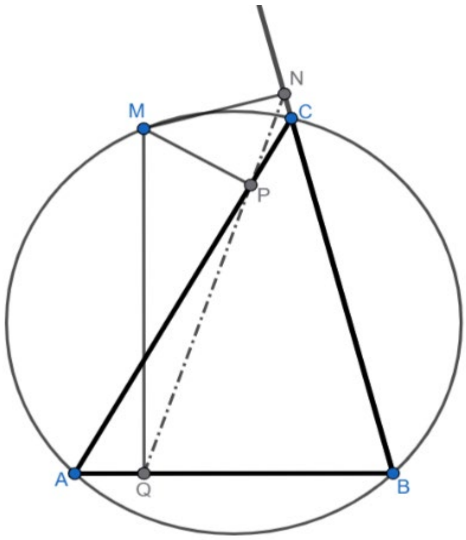
學 校 編 號＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　校 名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿

姓 名:＿＿＿＿＿＿＿, ＿＿＿＿＿＿＿＿, ＿＿＿＿＿＿＿＿, ＿＿＿＿＿＿＿＿

(注意：須詳列過程及說明理由)

5. 如圖，設點 M 在△ ABC的外接圓上，且$\overline{MN}$ 垂直於$\overleftrightarrow{BC}$上的N點，$\overline{MP}$垂直於$\overline{CA}$上的P點，$\overline{MQ}$垂直於$\overline{AB}$上的Q點。

求證: N, P, Q 三點共線(即可證 $\angle NPQ = 180^0$)



【參考解答】

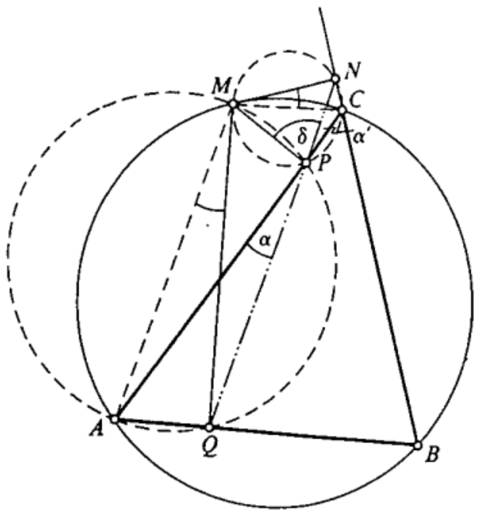
令$\angle NPM = \delta$，$\angle APQ = \alpha$，$\angle CPN = \alpha'$

因為$\angle APM = \angle AQM = 90^0$，所以，以$\overline{AM}$為直徑的圓過點 P、Q。由圓周角的性質得

$\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$。

同理，因為$\angle CNM = \angle CPM = 90^0$，所以，以$\overline{CM}$為直徑的圓過點 P、N。由圓周角的性質得

$\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$。



四邊形 $ABCM$ 內接於圓，

則$\angle AMC + \angle B = 180^0$(圓內接四邊形對角互補)

$\angle QMC + \angle AMQ + \angle B = 180^0 \ldots(1)$

因為$\angle BNM = \angle BQM = 90^0$，所以，以$\overline{BM}$為直徑的圓過點 N、Q。

四邊形 $BQMN$ 內接於圓，

則$\angle QMN + \angle B = 180^0$(圓內接四邊形對角互補)

$\angle QMC + \angle CMN + \angle B = 180^0 \ldots(2)$

由(1)(2) 我們得知 $\angle AMQ = \angle CMN$

則$\angle AMQ = \angle APQ = \alpha = \angle CMN = \angle CPN = \alpha'$

所以$\alpha = \alpha'$， $\angle NPQ = \angle NPM + 90^0 + \angle APQ = \delta + 90^0 + \alpha = \delta + 90^0 = \alpha' = \angle NPM + \angle MPA + \angle CPN = \angle CPA = 180^0$，

所以 N, P, Q 三點共線。