

高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

得 分 欄		1	2	3	4	5

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 已知二次方程式 $x^2 + ax + 3b = 0$ 二實數根的平方和小於 12，且 a, b 為整數，求當 a, b 為何值時，會使得 $a + b$ 的值為最小？

【參考解答】設二根為 α, β 。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 6b < 12, \text{ 且 } a^2 - 12b \geq 0$$

$$\text{故 } b > -2, b < 2$$

$$(1) b = -1, a = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$(2) b = 0, a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$(3) b = 1, a = -4, 4$$

故當 $(a, b) = (-4, 1), (-3, 0), (-2, -1)$ 時， $a + b = -3$ 為最小

高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

2. 一個六位數其百位數字、十位數字、個位數字依次為 3、6、9 且此數為某個整數的平方，試求滿足此條件的所有六位數(介於 100000 至 999999 之間)有那些？

【參考解答】設該六位數 n 為整數 k 的平方。

因 $n \leq 999999$ ，故 $k < 1000$ 。

可設 k 的百位數字、十位數字、個位數字依次為 a 、 b 、 c 。

因 n 的個位數為 9，故 c 為 3 或 7。

若 c 為 3，則 n 的十位數為 $60 \times b$ 的十位數，故 b 為 1 或 6。

($6 \times b$ 的個位數字為 6，故 b 為 1 或 6)

若 b 為 1，則 $n = (100 \times a + 13)^2 = 10000 \times a^2 + 2600 \times a + 169$ 。

因 n 的百位數為 3，故 a 為 7(2 不合)。(508369)

若 b 為 6，則 $n = (100 \times a + 63)^2 = 10000 \times a^2 + 12600 \times a + 3969$ 。

因 n 的百位數為 3，故 a 為 4 或 9。(214369, 927369)

故若 c 為 3，則有 3 個滿足條件的六位數。

若 c 為 7，則 n 的十位數為 $140 \times b + 49$ 的十位數，故 b 為 3 或 8。

若 b 為 3，則 $n = (100 \times a + 37)^2 = 10000 \times a^2 + 7400 \times a + 1369$ 。

因 n 的百位數為 3，故 a 為 5。(288369)

若 b 為 8，則 $n = (100 \times a + 87)^2 = 10000 \times a^2 + 17400 \times a + 7569$ 。

因 n 的百位數為 3，故 a 為 7(2 不合)。(619369)

故若 c 為 7，則有 2 個滿足條件的六位數。

共有 5 個滿足條件的六位數。分別為 $214369 = (463)^2$ 、 $288369 = (537)^2$ 、 $508369 = (713)^2$ 、 $619369 = (787)^2$ 、 $927369 = (963)^2$ 。

高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

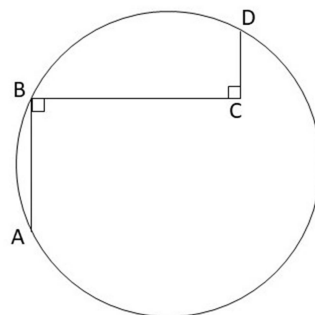
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

3. 如圖所示，點 A, B, D 在圓上， $\overline{AB} = 4$ 公分，
 $\overline{BC} = 8$ 公分， $\overline{CD} = 2$ 公分，且 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，
 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 。試求圓的面積？



【參考解答】如圖，延長 \overline{BC} 交圓於 E ，並做 \overline{AF} 平行 \overline{BE}

$\angle ABE = 90^\circ$ ，所以 \overline{AE} 為直徑且 $ABEF$ 為矩形

因為 $\angle DBE = \angle DFE$ 且 $\angle BCD = \angle FEM$

故 $\triangle DBC \sim \triangle MFE$ ， $\frac{8}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{ME}} = \frac{4}{\overline{ME}}$ ，得 $\overline{ME} = 1$

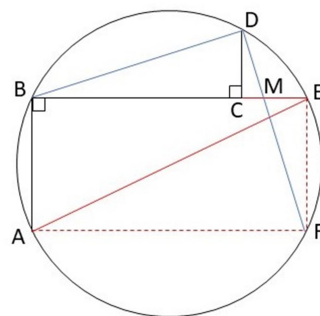
$\angle DMC = \angle FME$ 且 $\angle DCM = \angle FEM = 90^\circ$

$\triangle DMC \sim \triangle FME$ ，所以 $\frac{\overline{DC}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{ME}}$ ， $\frac{2}{\overline{MC}} = \frac{4}{1}$ ，得 $\overline{MC} = \frac{1}{2}$

令半徑為 r ，則 $\overline{AE} = 2r$ 。 $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{MC} + \overline{ME} = \frac{19}{2}$

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2, \quad 4r^2 = 16 + \frac{361}{4} = \frac{425}{4}$$

故圓面積為 $\frac{425}{16}\pi$ 平方公分



高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

4. 一個袋子裡有 2525 個玻璃珠，小明第一分鐘從袋中拿出一顆玻璃珠，從第二分鐘起，每分鐘拿出的玻璃珠數為之前的總數和，如果到某分鐘袋裡的玻璃珠少於已拿出的總數時，這一分鐘他則從拿一顆開始，按先前的規則進行新一輪的拿法，如此繼續下去，請問小明在第幾分鐘將袋中的玻璃珠拿光？

【參考解答】設小明第一輪用了 n 分鐘，即第 $n+1$ 分鐘時他從拿一顆開始

故前 n 分鐘他共拿出玻璃珠

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} \quad , \quad \text{且 } 2525 - 2^{n-1} < 2^{n-1}$$

設第二輪用了 m 分鐘，即第 $m+1$ 分鐘時他從拿一顆開始，所以此輪他拿出 2^{m-1} 顆玻璃珠

$$\text{且 } 2525 - 2^{n-1} - 2^{m-1} < 2^{m-1}, m < n$$

依此討論，只需將 2525 分解為 2 的次方的和，即

$$2525 = 2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$$

$$(11+1) + (8+1) + (7+1) + (6+1) + (4+1) + (3+1) + (2+1) + 1 = 49$$

所以小明在第 49 分鐘將袋中的玻璃珠拿光

高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____, _____, _____, _____

5. 有一個三位數，其百位數字為 a ，十位數字為 b ，個位數字為 c ，假設此數可被 11 整除且被 11 除完後的商為二位數，商的十位數字為 d ，商的個位數字為 e 。已知此數的各個位數字平方和等於商加 14，即 $a^2 + b^2 + c^2 = 10d + e + 14$ 。求滿足這些條件的所有可能的三位數為何？

【參考解答】

因為此數可被 11 整除

所以有兩種可能 (1) $b = a + c$ (2) $b = a + c - 11$

$$(1) \quad b = a + c \quad a^2 + (a + c)^2 + c^2 = 10a + c + 14$$

左式為偶數 所以 c 的可能值為 0, 2, 4, 6, 8，帶入考慮 a 的二次方程式，僅有 $c = 2$ ， $a^2 + (a + 2)^2 + 2^2 = 10a + 2 + 14$ ， $a = 4$ ， $b = 6$ ，故此數為 462

$$(2) \quad b = a + c - 11$$

$$a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2 = 10(a - 1) + c + 14$$

$$2a^2 + 2c^2 + 2ac - 22a - 22c + 117 = 10a + c$$

所以 c 的可能值為 1, 3, 5, 7, 9，帶入考慮 a 的二次方程式，都找不到解。