

# 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

得分欄		填充題	1	2	3

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

性別：☐男 ☐女

作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1.  $\sqrt{x^2} = \sqrt{18} - \sqrt{8}$ ，求  $x =$             $\pm\sqrt{2}$           

2. 設  $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \cdots (2^{128} + 1)$ ，  
求  $A$  的個位數字為何？           5          

3. 在一場共有 49 人的男女生聚會， $A_1$  男生與 8 位女生聊過天，  
 $A_2$  男生與 9 位女生聊過天， $A_3$  男生與 10 位女生聊過天，...，  
 $A_n$  男生與所有的女生均聊過天，請問此聚會的男生有幾位？           21          

4. 令  $a > b > c$  為等比數列三個連續的數，且滿足  $a^{80} = b^n = c^{120}$ ，  
求  $n$  的值為何？           96          

5. 若兩個質數  $a, b$  為  $x^2 - 33x + n = 0$  的兩個根，求  $n$  的值為何？           62          

6. 設  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ ，請問從  $S$  中最多能選出多少個數，  
使得其中任意 2 數之和都不能被它們的差整除？           675          

7. 假設  $x$  是一個實數。若  $x$  在一定的範圍內會滿足  
 $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{4x - 1}} + \sqrt{2x - \sqrt{4x - 1}} = c$  是一個定值。求  $x$  的範圍為  
           $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$           

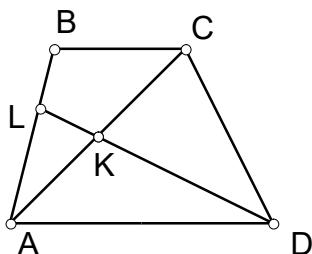
8. 從 1, 2, 3, …, 2023 這 2023 個正整數中，最多能取出幾個數字，  
使得對於任何取出的一個數字  $x$ ，都可得出  $13x$  不在取出的數字之中？  
          1879

9. 有一個四位數，其個位數字與百位數字相同。若把此四位數的數字順序顛倒寫(即千位數與個位數互換，百位數與十位數互換)，所得的新數減去原數得7812，求原四位數為何?

1979

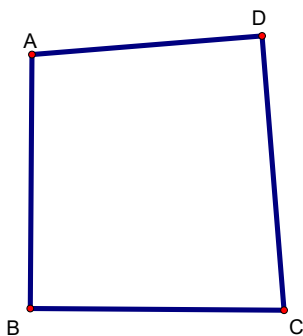
10. 設梯形  $ABCD$  的面積為 1，其上底為  $BC$ ，下底為  $AD$ ，令  $K$  為對角線  $AC$  的中點， $L$  為直線  $DK$  與邊  $AB$  的交點，已知  $AL:BL = 2:1$ ， $DK:KL = 3:1$  求四邊形  $BCKL$  的面積為何?

2/9



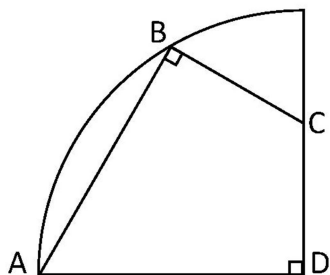
11. 已知四邊形  $ABCD$  中， $AB = BC$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ 。若四邊形  $ABCD$  面積等於 10 平方公分，求  $CD + DA$  的長度為何?

$2\sqrt{10}$



12. 如圖所示，扇形上有一四邊形  $ABCD$ ， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，已知  $AB = 24$ ， $BC = 7$ ，求  $\triangle ABD$  之面積為何?

192



第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分  
(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知存在惟一的實數  $r$ ，使得  $x$  的方程式  $x^2 + (r^2 - 2sr)x + r^2 - 2sr + 399 = 0$  的兩根均為質數，求實數  $s$  之值？

【參考解答】設  $p, q$  為二質數根 ( $p \leq q$ )

$$p + q = -r^2 + 2sr \quad pq = r^2 - 2sr + 399$$

$$(p+1)(q+1) = 2^4 \cdot 5^2$$

$p, q$  不可能為 2

若  $\frac{p+1}{2}$  為奇數，則  $p = 2 \cdot 5^k - 1$  ( $k = 1, 2$ )

$p = 9$  或  $49$  (不是質數)，故  $\frac{p+1}{2}$  為偶數。同理  $\frac{q+1}{2}$  也為偶數

因此  $\frac{p+1}{4}, \frac{q+1}{4}$  均為整數， $\frac{p+1}{4} \cdot \frac{q+1}{4} = 5^2$

$\frac{p+1}{4} = 1$  或  $5$ ，即  $p = 3, q = 99$  (不合)；或  $p = 19, q = 19$

$$r^2 - 2sr + 38 = 0,$$

因方程式有惟一實數解，故  $4s^2 - 4 \cdot 38 = 0$ ，所以  $s = \pm\sqrt{38}$

2. 在 "1□2□3□4□5□6□7□8□9□10" 中的每個方格填入 "+" 或 "-"，考慮所得的和。如  $1+2-3+4+5+6-7-8-9+10$  的和為 1。

(a) 試填入 "+" 或 "-" 使得和為 11。

(b) 使得和為 31 的填入方法數共有多少種。

【參考解答】

(a)  $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10$  之和即為 11。

(b) 設填 "+" 的數字和 (包含 1) 為  $x$ ，填 "-" 的數字和為  $y$ 。

可知  $x + y = 55$  及  $x - y = 31$ 。並得出  $x = 43$  及  $y = 12$ 。

考慮從 2 至 10 中選出若干數，使得其和為 12，其方法數與所求的填入方法數相同。

因最大數為 10，可知至少需選出 2 個數。

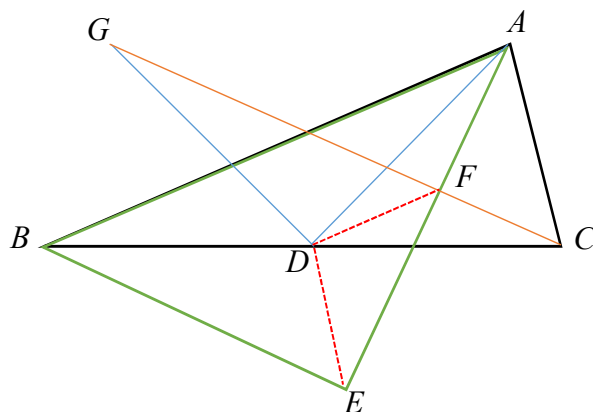
且因  $2+3+4+5=14$ ，可知至多只能選出 3 個數。

若兩數之和為 12，則必為 2+10, 3+9, 4+8, 5+7，共 4 種方法。

若三數之和為 12，則必為 2+3+7, 2+4+6, 3+4+5，共 3 種方法。

故共有 7 種填入方法。

3. 如圖所示，已知  $BE \perp AE$  於點  $E$ ， $\angle ABC = \angle CBE$ ， $CF \perp AE$  於點  $F$ ，延長  $CF$  至點  $G$ ，點  $D$  是  $\triangle ABC$  的邊  $BC$  上一點，使得  $GD = AD$ ，且滿足  $\angle G = \angle DAB$ ，連接  $DE$ 、 $DF$ ，求證： $DE = DF$ 。



[參考解答]

$\because CF \perp AE, BE \perp AE$

$\therefore GC \parallel BE \Rightarrow \angle GCD = \angle CBE = \angle ABD$

$\because \angle ABD = \angle GCD, \angle DAB = \angle DGC, DA = DG$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle GCD$  (AAS)  $\Rightarrow BD = CD$ ，即點  $D$  為  $BC$  的中點

連接  $CE$ ，取  $CE$  的中點  $M$ ，連接  $DM$ ，交  $FE$  於點  $N$ ，如圖所示

$\therefore DM \parallel BE$  又  $GC \parallel BE$ ，故  $DM \parallel CF$

又  $\triangle CEF$  中， $M$  是  $CE$  的中點且  $DM \parallel CF$

故  $N$  是  $EF$  的中點且  $DM \perp EF$

即  $DM$  垂直平分  $EF$ ，故  $DE = DF$

