

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

| | | | | | | |
|-------------|--|---|---|---|---|---|
| 得 分 欄 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | | |

隊際賽試題

編 號 _____

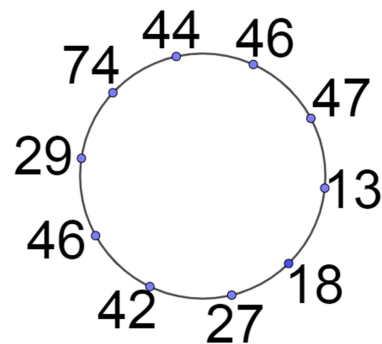
校 名: _____

姓 名: _____, _____, _____, _____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 如右下圖，10 個人圍一圓圈，圖上每一個數字為左右兩邊人的平均年齡，請問數字 47 的人年齡為何？



【參考解答】

設數字 47 的人年齡為 x ，則數字 44 的人為 $(2 \times 46 - x)$ 歲；數字 18 的人為 $(2 \times 13 - x)$ 歲，數字 29 的人為 $(2 \times 74 - (2 \times 46 - x))$ 歲；數字 42 的人為 $(2 \times 27 - (2 \times 13 - x))$ 歲；所以 $[2 \times 74 - (2 \times 46 - x) + 2 \times 27 - (2 \times 13 - x)] / 2 = 46$

$$42 + x = 46$$

年齡為 4 歲

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓 名:_____,_____,_____,_____

2. 某體育室中棒球、籃球及排球的個數為三個相異的質數，且棒球與籃球個數的總合乘以棒球的個數恰好比排球的個數個數多 528 個。求棒球、籃球及排球各有多少個？

【參考解答】設棒球(a 個)、籃球(b 個)及排球(c 個)

$$a(a + b) = c + 528$$

a, b, c 不可能均為奇數，因為 $a + b$ 為偶數

$a = 2$ 不可能，因為 $c + 528$ 為奇數

- (i) $c = 2$ ，因為 $c + 528 = 530 = 2 \times 5 \times 53$ ，故 $a = 5$ ，此時 $a + b = 106$

$$\text{即}(a, b, c) = (5, 101, 2)$$

- (ii) $b = 2$ ， $a^2 + 2a - 528 = c$ ， $(a - 22)(a + 24) = c$

因為 c 是質數，故 $a = 23$ ， $c = 47$ ；

$$\text{即}(a, b, c) = (23, 2, 47)$$

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 設 a, b, c 均是不為 0 的實數， $A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ， $B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ，

$C = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ ，且 $A + B + C = 1$ 。求 A, B, C 的值為何？

【參考解答】

$$(A - 1) + (B - 1) + (C + 1) = 0,$$

$$\frac{(a-b)^2 - c^2}{2ab} + \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc} + \frac{(c+a)^2 - b^2}{2ca} = 0$$

同乘以 $2abc$ 得

$$(a-b+c)c(a-b-c) + (b-c+a)a(b-c-a) + (c+a+b)b(c+a-b) = 0$$

所以，

$$(a-b+c)[c(a-b-c) - a(b-c+a) + b(c+a+b)] = 0$$

$$(a-b+c)(-c^2 + 2ac - a^2 + b^2) = 0$$

$$(a-b+c)(b-a+c)(b+a-c) = 0$$

(1) $a = b + c$

$$A = \frac{1}{2ab}(b^2 + 2bc + c^2 + b^2 - c^2) = 1$$

$$B = \frac{1}{2bc}(b^2 + c^2 - b^2 - 2bc - c^2) = -1$$

$$C = \frac{1}{2ca}(b^2 + 2bc + c^2 + c^2 - b^2) = 1$$

(2) $b = c + a$ $A = 1, B = 1, C = -1$

(3) $c = a + b$ $A = -1, B = 1, C = 1$

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓 名:_____,_____,_____,_____

4. 七個相異的正整數的和為 100，且任意三個數之和皆小於或等於 50，求滿足此條件的七個數為何？

【參考解答】

可由小至大將七個數記為 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ 。

若 $a_4 \geq 15$ ，則 $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51$ ，不合。

假設 $a_4 \leq 14$ 。

因 $a_5 + a_6 + a_7 \leq 50$ ，可知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 100 - 50 = 50$ 。

且因 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ，可知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$ 。

故 $a_1 = 11$ ， $a_2 = 12$ ， $a_3 = 13$ ， $a_4 = 14$ 。

因 $a_5 \geq 15$ 且 $a_5 + a_6 + a_7 = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 50$ 。

可知僅有 $a_5 = 15$ ， $a_6 = 16$ ， $a_7 = 19$ 或 $a_5 = 15$ ， $a_6 = 17$ ， $a_7 = 18$ 兩種可能。

即 $a_1 = 11$ ， $a_2 = 12$ ， $a_3 = 13$ ， $a_4 = 14$ ， $a_5 = 15$ ， $a_6 = 16$ ， $a_7 = 19$

$a_1 = 11$ ， $a_2 = 12$ ， $a_3 = 13$ ， $a_4 = 14$ ， $a_5 = 15$ ， $a_6 = 17$ ， $a_7 = 18$

高雄市 110 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

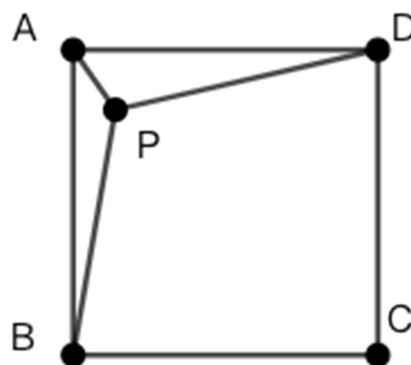
編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 如右下圖所示，設正方形 $ABCD$ 內部有一點 P ，滿足 $\overline{AP} = 5$,

$\overline{BP} = 12\sqrt{2}$, $\overline{DP} = 13\sqrt{2}$ ，求正方形 $ABCD$ 的面積。



【參考解答】

首先畫點 E 使得 $\triangle AED \cong \triangle APB$ ，則 $\angle EAP = 90^\circ$ ，且 $\triangle AEP$ 為等腰直角三角形，所以 $\overline{EP} = 5\sqrt{2}$ ，又由於 $\overline{BP} = \overline{ED} = 12\sqrt{2}$, $\overline{DP} = 13\sqrt{2}$ ，所以 $\angle DEP = 90^\circ$ 。

再建構點 F 使得 $\triangle AFE$ 為等腰直角三角形， $\overline{EF} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ ，

所以 $\overline{FD} = \overline{EF} + \overline{ED} = \frac{5}{2}\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = \frac{29}{2}\sqrt{2}$ 。因此，面積為 $\overline{FD}^2 = \frac{841}{2}$ 。

$$\overline{AD}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{841}{2} + \frac{25}{2} = 433$$

