

高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

得 分 欄		1	2	3	4	5

隊際賽試題

編號_____

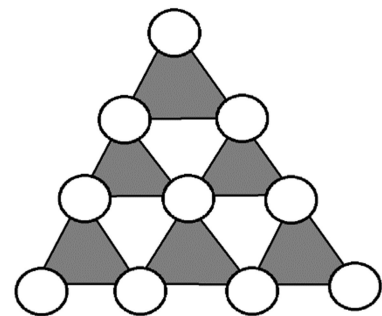
校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

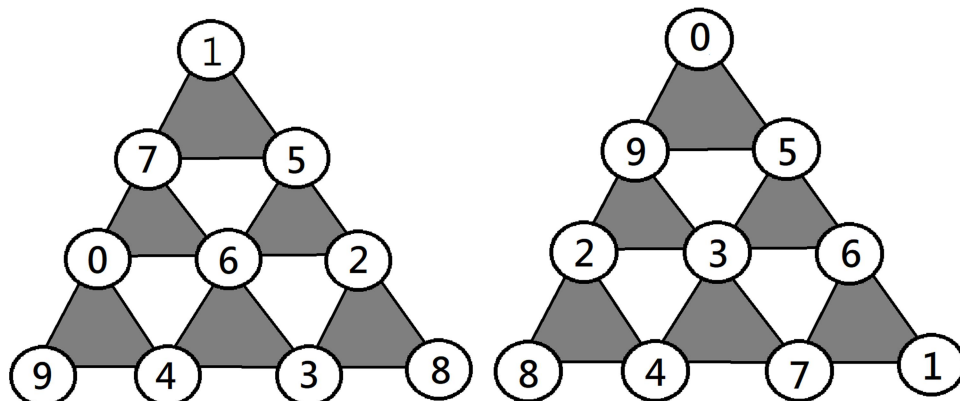
作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 請將 0~9 分別填入右圖中的十個圓圈內，使得每個黑三角形的三個頂點的數字和全部相等。(至少給兩組解)



【參考解答】



高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓 名:_____,_____,_____,_____

2. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一排，除了排在最前與最後的兩個數之外，所有數字均小於或等於它兩側的兩個數的平均。試問滿足這樣條件的排列有那些？

【參考解答】共 8 個

因除了最前與最後的兩個數之外，所有數字均小於或等於它兩側的兩個數的平均，所以 6 必定在最前或最後的位置。且依此類推，在剩下的 5 個數之中，5 必定在這 5 個數中最前或最後的位置。在剩下的 4 個數之中，4 必定在這 4 個數中最前或最後的位置。

若將一個滿足條件的排列由後至前排列亦滿足條件，故可假設 6 在最前的位置。

若 5 在第二個位置，依條件可知排列必定為 654321。

假設 5 在第六個位置。

若 4 在第五個位置，依條件可知排列必定為 612345。

假設 4 在第二個位置。

若 3 在第三個位置，依條件可知排列必定為 643215。

若 3 在第五個位置，依條件可知排列必定為 642135。

將上述 4 個排列由後至前排列可得出另外滿足條件的 4 個排列。分別為 123456、543216、512346、531246。

高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 已知 n 個整數 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 他們的乘積是 n ，和是 0 。試證 n 為 4 的倍數。

【參考解答】

依題目假設 n 個整數為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，則

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = n \text{-----} \textcircled{1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \text{-----} \textcircled{2}$$

由①若 n 為奇數，則 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 應皆為奇數，此與②不合，故 n 為偶數，且 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 至少有一數為偶數，設此偶數為 x_i 。

又剩下 $n-1$ 個整數， $n-1$ 為奇數，要滿足②，則必須有一數為偶數，設此偶數為 x_j 。

所以， $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 至少包含兩個偶數，因此 $4 \mid n$
故得證。

高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 設 x 的二次方程式 $(k^2 - 6k + 8)x^2 + 2(k - 6)x - 8 = 0$ 的二根均為整數，求實數 k 之值為何？

【參考解答】 $[(k - 2)x + 4][(k - 4)x - 2] = 0$

$$x_1 = \frac{-4}{k-2}, x_2 = \frac{2}{k-4}$$

$$k = 2 - \frac{4}{x_1}, k = 4 + \frac{2}{x_2}$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{2}{x_1} = -1, (x_1 + 2)(x_2 + 1) = 2$$

$$(x_1 + 2) = 2 \quad (x_2 + 1) = 1: \quad \text{則 } x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad k: \text{不可能}$$

$$(x_1 + 2) = -2 \quad (x_2 + 1) = -1: \quad \text{則 } x_1 = -4 \quad x_2 = -2 \quad k=3$$

$$(x_1 + 2) = 1 \quad (x_2 + 1) = 2: \quad \text{則 } x_1 = -1 \quad x_2 = 1: \quad k=6$$

$$(x_1 + 2) = -1 \quad (x_2 + 1) = -2: \quad \text{則 } x_1 = -3 \quad x_2 = -3: \quad k=10/3$$

高雄市 109 學年度國民中學數學競賽

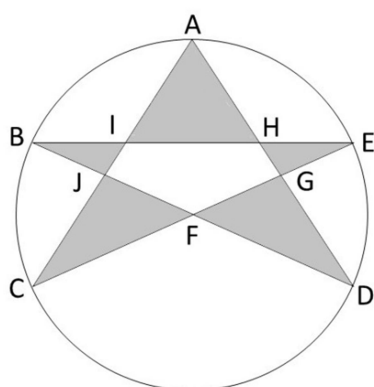
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 如下圖所示，若點 A, B, C, D, E 在半徑為2的圓周上，並且 $\angle EBD = \angle ACE = \angle BDA = \angle CEB = 30^\circ$ ，求陰影部分的面積。



【參考解答】

根據圓周角定理可知

$$\begin{aligned}\angle BCD &= \angle BCA + \angle ACE + \angle ECD \\ &= \angle BDA + \angle ACE + \angle EBD = 90^\circ\end{aligned}$$

$\therefore BD$ 是圓的直徑，同理可證 CE 也是圓的直徑，所以

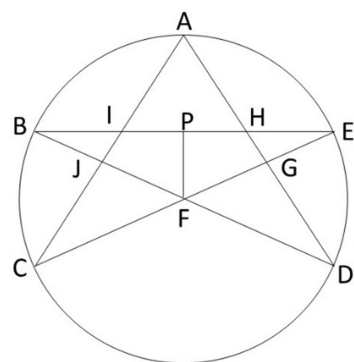
F 是圓心。過 F 作 BE 的垂線，垂足為 P 。

在 $\triangle BFP$ 中，由 $\angle PBF = 30^\circ$ 和 $\angle FPB = 90^\circ$ 可得 $\angle BFP = 60^\circ$ 。又因為 BF 為半徑其長度為2，所以

$FP = 1$ ， $BP = \sqrt{3}$ ，於是 $\triangle BFP$ 的面積是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。在 $\triangle CFJ$ 中，由 $\angle JCF = 30^\circ$ ， $\angle CFJ = \angle FEB + \angle FBE = 60^\circ$ ，可得 $\angle FJC = 90^\circ$ 。又由於 $FC = 2$ ，可推得 $FJ = 1$ 和 $CJ = \sqrt{3}$ 。所以 $\triangle CFJ$ 的面積是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。在 $\triangle BJI$ 中，由 $\angle JBI = 30^\circ$ ，

$\angle BJI = \angle FJC = 90^\circ$ ，可得 $\angle BIJ = 60^\circ$ 。又因為 $BJ = BF - FJ = 2 - 1 = 1$ ，

所以 $IJ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 且 $BI = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。從而可知 $\triangle BJI$ 的面積是 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 。同理可得 $\triangle EHG$ 的面積



$= \triangle BJI$ 的面積 $= \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ， $\triangle DGF$ 的面積 $= \triangle CFJ$ 的面積 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。在 $\triangle AIH$ 中，

$\angle AIH = \angle BIJ = 60^\circ$ ， $\angle AHI = \angle EHG = 60^\circ$ ，所以 $\triangle AIH$ 為一正三角形。

$IP = BP - BI = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，同樣地，我們也可得到 $PH = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，所以 $IH = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

由此可知正三角形 $\triangle AIH$ 的面積為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。由以上可知陰影部分的面積為

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}。$$