

高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 假設 $16^{2020} = x^y$ ，其中 x, y 皆為正整數，試求 x 的所有可能值的個數為_____

答: 20

2. 張老師將班上學生分為 A 、 B 兩隊競賽，比賽完之後頒發巧克力當成獎品。已知 A 、 B 兩隊贏得的巧克力個數恰是自己隊人數的兩倍。張老師總共帶了 700 顆巧克力，發完之後他自己還剩下 20 個。已知 A 隊人數比 B 隊多兩位，試求班上總共有多少位學生？_____

答: 26 (或 340)

3. 求 $(1+x)(1+2x^2)\cdots(1+19x^{19})(1+20x^{20})$ 展開式中 x^8 項的係數為_____

答: 64

4. 小美將身上的錢捐給六家孤兒院，首先她將身上錢乘以 2 再加上 2 元後的三分之一捐給第一個孤兒院，然後將剩餘錢的 2 倍再加上 2 元後除以 3 的結果捐給第二家孤兒院；以此捐錢的方式進行到第六家孤兒院後，她身上只剩 2 元。則小美身上原有_____元

答: 2186

5. 設 $M = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^4$ ，則不超過 M 的最大正整數為_____

答: 367

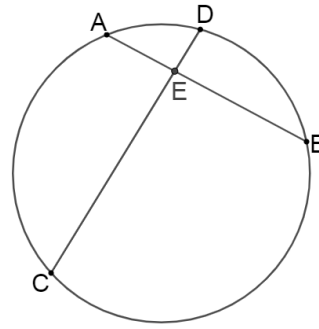
6. 設 n 是一個三位數的正整數，將其三個數字相加後再加上它的三個數字兩兩相乘及三個數字相乘後產生一個新數 N ，舉例而言， $n = 135$ ，則 $N = (1+3+5) + (1 \times 3 + 1 \times 5 + 3 \times 5) + (1 \times 3 \times 5) = 47$ 。求所有滿足 $n = N$ 的三位數之和為_____

答: 5391

7. 港警所接到一個檢舉電話，內容為：在一艘將要啟航的貨櫃輪上其中有一個貨櫃裝有違禁物品，電話中並給了一個不知何意的數 " $100\frac{4}{11}$ "。根據警方人員的調查與研判，這艘船上的所有貨物都裝在從 1 開始以連續自然數依次編號的貨櫃中，而且這個數字 " $100\frac{4}{11}$ " 是除了藏有違禁物品的那個貨櫃外，其他所有貨櫃編號的算術平均數。根據這些線索，試找出這個藏有違禁物品貨櫃的編號為_____。

答: 28

8. 如圖， $ABCD$ 為圓上四點且 \overline{AB} 與 \overline{CD} 垂直。
若 $\overline{AE} = 6$ ， $\overline{BE} = 13$ ， $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{CE} = 16$ ，求此圓面積為_____

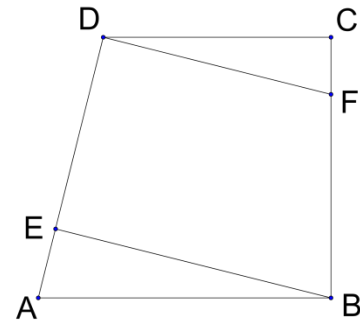


垂直。

(因原題目敘述有誤，此題一律給分)

9. 右圖中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ ， $\overline{BE} \parallel \overline{DF}$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CD} = 7$ ，求四邊形 $EBFD$ 面積。

答: $\frac{235\pi}{4}$

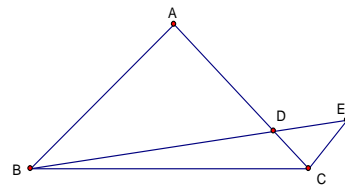


答: 6575/136

10. 在一圓周上有 1200 個相異點，今任取一點並標示上 1，然後依順時間方向在此點之後，數兩個點並在此點上標示 2，然後在標示為 2 的後面數參個點，並在此點上標示 3，即在標示上 1 與標示 3 的中間有四個點，繼續此過程，在圓周上分別標示出 1, 2, 3, ..., 917，此時在圓周上有些點可能被標示出好幾個數，有些點可能沒被標示到，求圓周上被標示出 917 的那個點上被標示出的最小數是_____

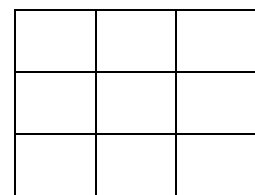
答: 42

11. 右下圖中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 2\angle BEC$ ，線段 BE 交 AC 於 D 且 $AC = 4$ ， $AD = 3$ 。則 $BD \times DE =$ _____。



答: 7

12. 在 3×3 的方格表中分別填入 4 個 1、4 個 2 和 1 個 3，則使得每行每列所填的數字之和均為奇數的填法共有多少種?_____



答: 45

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知兩實數 α 與 β 滿足 $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 2$ 與 $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 4$ ，試求出 $\alpha + \beta$ 之值

【參考解答】

由 $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 2$ ，可得出 $(\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) = -1$ 。

由 $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 4$ ，可得出 $(\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) = 1$ 。

設 $f(t) = t^3 + 2t$ ，可知 $f(-t) = -f(t)$ 且 $f(t)$ 為遞增函數。

可知 $f(\alpha - 1) = -1$ 及 $f(\beta - 1) = 1$ 。

整理可得 $f(\alpha - 1) = -1 = -f(\beta - 1) = f(1 - \beta)$ 及 $\alpha - 1 = 1 - \beta$ 。

所以 $\alpha + \beta = 2$ 。

或

令 $\alpha = a + 1$ $\beta = b + 1$

$$(a + 1)^3 - 3(a + 1)^2 + 5(a + 1) = 2$$

$$a^3 + 2a + 1 = 0$$

$$\text{同樣做法可得 } b^3 + 2b - 1 = 0$$

$$\text{所以 } a^3 + b^3 + 2(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 2) = 0$$

$$a + b = 0 \text{ 因為 } (a^2 - ab + b^2 + 2) = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 2 > 0$$

所以 $\alpha + \beta = 2$ 。

2. 有一個加法算式如下圖，不同英文字母代表不同的阿拉伯數字，相同英文字母代表相同的阿拉伯數字，試求此算式所有可能值？

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ + ABCD \\ \hline 202E \end{array}$$

【參考解答】

由總和的千位數可知，只能為 1 或 2。若 $A=2$ ，則百位數和不可進位；但百位數和為 $A+B=2+B>0$ ，矛盾！

所以 $A=1$ ，百位數和需要進位且恰進 1 位；由於 $A=1$ ，十位數和最多進 2 位。 $A+B=10$ ，9 或 8（考慮到總和的百位數為 2，所以十位數和恰進 0, 1 或 2 位）。

(1) 若 $A+B=10$ ，則 $B=9$ ，十位數和不可進位，但十位數和為 $A+B+C=10+C>10$ ，矛盾！

(2) 若 $A+B=9$ ，則 $B=8$ ，十位數和恰進 1 位；考慮到總和的十位數為 2， $A+B+C+(\text{個位數和進位})=12$ 。由於個位數和為 $(A+B+C+D=9+C+D)$ 最多進 2 位，因此 $A+B+C=12, 11$ 或 10 。

(個位數和恰進 0, 1 或 2 位的情況)

(2a) 若 $A+B+C=12$ ，則 $C=3$ ，個位數和不可進位。但個位數和為 $A+B+C+D=12+D>10$ ，矛盾！

(2b) 若 $A+B+C=11$ ，則 $C=2$ ，個位數和恰進 1 位，個位數和為 $10+E=A+B+C+D=11+D$ ，所以 $E=D+1$ ， D 至少是 0，至多是 8；且 D, E 不能為 1, 8, 2 的其中任意一個。

所以這邊有 4 組解：

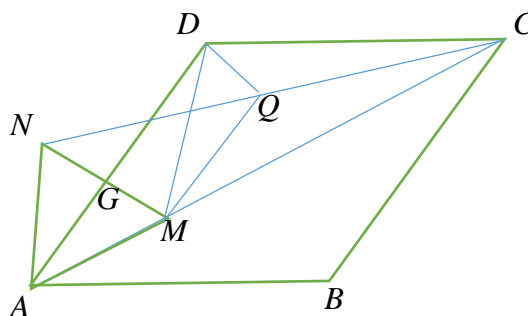
$$(A, B, C) = (1, 8, 2)$$

$$(D, E) = (3, 4), (4, 5), (5, 6) \text{ 或 } (6, 7)$$

(2c) 若 $A+B+C=10$ ，則 $C=1$ ，個位數和恰進 2 位，個位數和為 $A+B+C+D=20+E$ ，所以 $D>9$ ，矛盾！

3. 如圖所示，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ， M 為對角線 \overline{AC} 上異於 A 、 C 的一點，以 \overline{AM} 為邊，作等邊 $\triangle AMN$ ，線段 \overline{MN} 與 \overline{AD} 交於點 G ，連接 \overline{NC} 、 \overline{DM} ， Q 為線段 \overline{NC} 的中點，連接 \overline{DQ} 、 \overline{MQ} 。

求證： $\overline{DM} = 2\overline{DQ}$



【參考解答】

延長 \overline{CD} 至點 P ，使得 $\overline{DP} = \overline{DC}$ ，連接 \overline{PA} 、 \overline{PN} ，如下圖所示。

$$\because \angle PDA = 60^\circ, \overline{DP} = \overline{DC} = \overline{AD}$$

$\therefore \triangle PDA$ 為等邊三角形

$$\Rightarrow \overline{PA} = \overline{DA}, \angle PAD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle PAN + \angle NAD = 60^\circ, \angle DAM + \angle NAD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle PAN = \angle DAM$$

$$\because \begin{cases} \overline{PA} = \overline{DA} \\ \angle PAN = \angle DAM \\ \overline{AN} = \overline{AM} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAN \cong \triangle DAM \text{ (SAS)}$$

$$\Rightarrow \overline{PN} = \overline{DM}$$

$$\because \overline{PD} = \overline{DC}, \overline{NQ} = \overline{CQ}$$

$\therefore \overline{DQ}$ 為 $\triangle CPN$ 的中位線

$$\therefore \overline{DQ} = \frac{1}{2} \overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{DM}$$

故 $\overline{DM} = 2\overline{DQ}$ 。

