

高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 已知某工廠現有矽膠原料 360 kg，碳纖原料 290 kg，計畫利用這兩種原料生產 A、B 兩項產品，共 50 件。已知生產一件 A 項產品，需用矽膠原料 9 kg、碳纖原料 3kg；生產一件 B 項產品，需用矽膠原料 4 kg、碳纖原料 10 kg。
 - (1) 依據現有條件安排 A、B 兩項產品的生產件數，有哪幾種方案，請設計出來。
 - (2) 若矽膠原料每公斤 80 元、碳纖原料每公斤 120 元，求最低成本的設計需要多少元？

【參考解答】

- (1) 設生產 A 項產品 x 件，B 項產品 $(50 - x)$ 件。則

$$\begin{cases} 9x + 4(50 - x) \leq 360 \\ 3x + 10(50 - x) \leq 290 \end{cases} \Rightarrow 30 \leq x \leq 32$$

因 x 為正整數，得 $x = 30、31、32$ ，故有三種生產方案，即

方案一：生產 A 項產品 30 件、B 項產品 20 件；

方案二：生產 A 項產品 31 件、B 項產品 19 件；

方案三：生產 A 項產品 32 件、B 項產品 18 件。

- (2) 方案一的成本： $80 \times (9 \times 30 + 4 \times 20) + 120 \times (3 \times 30 + 10 \times 20) = 62800$
方案二的成本： $80 \times (9 \times 31 + 4 \times 19) + 120 \times (3 \times 31 + 10 \times 19) = 62360$
方案三的成本： $80 \times (9 \times 32 + 4 \times 18) + 120 \times (3 \times 32 + 10 \times 18) = 61920$
所以，方案三的成本最低為 61920 元

高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 若將 109^{109} 以十進位表示，則其個位數字，十位數字及百位數字為何？

【參考解答】

可將 109 化為 $100+10+(-1)$ ，所求之數即為 $[100 + 10 + (-1)]^{109}$ 。

若 109 個括號中，有兩個以上取到 100，則不影響百位以內的數字。

若僅有一個括號取到 100，僅需考慮其他括號皆取到 -1，否則不影響百位以內的數字。

而 $109 \times 100^1 \times (-1)^{108}$ 的末三位數字為 900。

若所有括號皆不取 100，僅需考慮至多兩個括號取到 10，否則不影響百位以內的數字。

$$\text{而 } 1 \times 10^0 \times (-1)^{109} + 109 \times 10^1 \times (-1)^{108} + \frac{109 \times 108}{2} \times 10^2 \times (-1)^{107}$$

$$=-1+1090-588600=-587511。$$

故末三位數為 $900-511=389$ 。

高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 給定一個正數 a ，滿足不等式 $2 < ax < 3$ ，則 x 恰有 2 個整數解。
試求 a 的範圍。

【參考解答】

假設不等式 $2 < ax < 3$ ， x 的 2 個整數解為 $k, k+1$ ， k 為正整數， $\frac{2}{a} < x < \frac{3}{a}$ 。

所以， $k-1 \leq \frac{2}{a} < k$ 且 $k+1 < \frac{3}{a} \leq k+2$ ，化簡，

$$\frac{k-1}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{k}{2} \quad \text{且} \quad \frac{k+1}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{k+2}{3}$$
$$\frac{k-1}{2} \leq \frac{k+2}{3} \quad \text{且} \quad \frac{k+1}{3} < \frac{k}{2}$$

$$k \leq 7 \quad \text{且} \quad 2 < k$$

所以， $k = 3, 4, 5, 6, 7$

$$k = 3, \quad \frac{2}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{3}{2} \quad \text{且} \quad \frac{4}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{5}{3}, \quad \text{所以}, \quad \frac{4}{3} < \frac{1}{a} < \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3} < a < \frac{3}{4}。$$

$$k = 4, \quad \frac{3}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{4}{2} \quad \text{且} \quad \frac{5}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{6}{3}, \quad \text{所以}, \quad \frac{5}{3} < \frac{1}{a} < 2, \quad \frac{1}{2} < a < \frac{3}{5}。$$

$$k = 5, \quad \frac{4}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{5}{2} \quad \text{且} \quad \frac{6}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{7}{3}, \quad \text{所以}, \quad 2 < \frac{1}{a} \leq \frac{7}{3}, \quad \frac{3}{7} \leq a < \frac{1}{2}。$$

$$k = 6, \quad \frac{5}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{6}{2} \quad \text{且} \quad \frac{7}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{8}{3}, \quad \text{所以}, \quad \frac{5}{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{8}{3}, \quad \frac{3}{8} \leq a \leq \frac{2}{5}。$$

$$k = 7, \quad \frac{6}{2} \leq \frac{1}{a} < \frac{7}{2} \quad \text{且} \quad \frac{8}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{9}{3}, \quad \text{所以}, \quad \frac{6}{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{9}{3}, \quad a = \frac{1}{3}。$$

$$a \text{ 的範圍: } \boxed{\frac{2}{3} < a < \frac{3}{4} \text{ 或 } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{5} \text{ 或 } \frac{3}{7} \leq a < \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3}{8} \leq a \leq \frac{2}{5} \text{ 或 } a = \frac{1}{3}}。$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}。$$

高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 在 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 8$, $\angle C = 90^\circ$, 點 P 在 \overline{AB} 上, 使得 $\angle APC = 2\angle ACP$,

且 $\overline{CP} = 2$ 。已知 $\overline{AP} > \overline{BP}$, 求 $\overline{AP} = ?$

【參考解答】

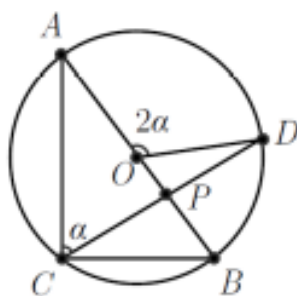
因為 ABC 為直角三角形, 則其外接圓以 \overline{AB} 中點 O 為圓心。令半徑 $\overline{OC} = \gamma$, $\angle ACP = \alpha$ 。延長 \overline{CP} 交圓於 D 點。因為 $\angle AOD = 2\alpha = \angle APC = \angle DPB$, 所以 $\triangle DOP$ 為等腰, $\overline{OD} = \overline{DP} = \gamma$ 。

因為圓內角的角由所對圓弧決定, 再由於 AA 相似, 所以 $\triangle APD$ 跟 $\triangle CPB$ 相似。

因此, 可得 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}$ 和 $\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DP}}$ 。所以 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DP}} = \frac{2\gamma}{\gamma} = 2$ 。將 $\overline{AB} =$

8 , $\overline{CP} = 2$ 代入上式可得 $\frac{2}{8-\overline{AP}} + \frac{2}{\overline{AP}} = 2$ 。因為 $\overline{AP} > \overline{BP}$, 經過計算可得 $\overline{AP} = 4 +$

$2\sqrt{2}$ 。



高雄市 108 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 已知數列 1, 5, 9, 10, 20, 23, 27, 28, 35, 37, 40, 42, 45, 48, 49, 53, 58, 61 中，相鄰的一些數的和為 13 的倍數的數組共有多少組？

【參考解答】

1, 5, 9, 10, 7, -3, 1, 2, -4, -2, 1, 3, 6, -4, -3, 1, 6, -4

令 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$

S_1, S_2, \dots, S_{18} 除以 13 的餘數分別為：

1, 6, 2, 12, 6, 3, 4, 6, 2, 0, 1, 4, 10, 6, 3, 4, 10, 6

$S_j - S_i (j > i)$ 為相鄰的數之和，且 $S_j - S_i$ 被 13 整除。

0---1 個 1---2 個 2---2 個 3---2 個 4---3 個 6---5 個 10---2 個

故 $1+1+1+1+3+10+1=18$