

# 高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $N=3^{2019}$ ，則  $N$  的最後兩位數為\_\_\_\_\_。

答：67

2. 已知  $a_1, a_2, \dots, a_{35}$  皆為正整數，設  $d$  為  $a_1, a_2, \dots, a_{35}$  的最大公因數，若  $a_1+a_2+\dots+a_{35}=2145$ ，則  $d$  的最大值為\_\_\_\_\_。

答：55

3. 設  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  為一數列，且對任意的正整數  $n$ ，使得  $a_{n+1} + a_n = (n+1)^2$  皆成立。若  $a_3 = 9$ ，則  $a_{108}$  之值為\_\_\_\_\_。

答：5883

4. 設  $a_1, a_2, a_3, a_4$  為四個有理數，且  $a_1 > 0$ ，若  $a_1 a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 a_3 = 4$ ,  $a_1 a_4 = -6$ ,  $a_2 a_3 = -8$ ,  $a_2 a_4 = 12$ ,  $a_3 a_4 = -96$  則  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ \_\_\_\_\_。

答： $-\frac{9}{2}$

5. 如果把數字 1,2,3,4,5,6 各用一次，組成兩個三位數  $m$  和  $n$ ，則  $m$  和  $n$  乘積之最大值為\_\_\_\_\_。

答：342002

6. 若從 11 到 1500 這 1490 個正整數中任意取  $n$  個相異數，使得這  $n$  個數中一定存在 3 個相異數可成為三角形的三邊長，則  $n$  的最小值為\_\_\_\_\_。

答：12

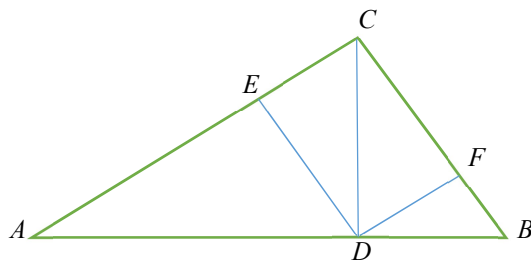
7. 已知  $x^2 - xy - x = 2019$ ,  $y^2 - xy + y = 51$ ，則  $x - y$  的所有可能值之和為\_\_\_\_\_。

答：1

8. 設  $S$  為正整數 1,2,3,...,2000,... 所成的集合，即  $S = \{1,2,3,\dots,2000,\dots\}$ ，則刪除  $S$  中的完全平方項後的第 2019 項為\_\_\_\_\_。(注意： $1 = 1^2$  視為一完全平方項。)

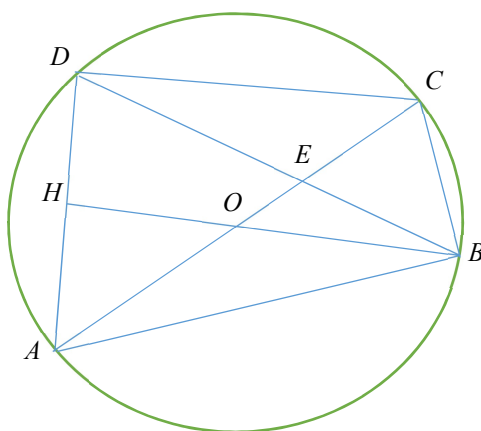
答：2064

9. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CD}$ 是斜邊 $\overline{AB}$ 上的高， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ 於 $E$ 、 $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ 於 $F$ ， $AC:BC = 4:3$ ，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}$ 之值為\_\_\_\_\_。



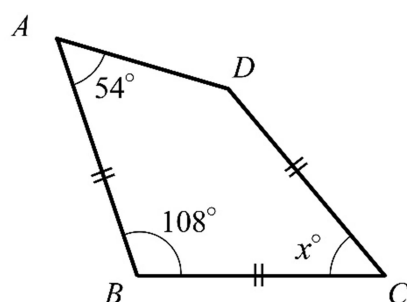
答： $\frac{64}{27}$

10. 如下圖，已知四邊形 $ABCD$ 內接於圓 $O$ ，對角線 $\overline{AC}$ 經過圓心，且交 $\overline{BD}$ 於點 $E$ ， $\overline{BO} \perp \overline{AD}$ 於 $H$ ， $\overline{OA} = \overline{AD} = 2\text{ cm}$ 。則 $\angle BEC$ 的度數為\_\_\_\_\_。



答： $45^\circ$

11. 右圖中，若 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ， $\angle ABC = 108^\circ$ ， $\angle BAD = 54^\circ$ ，則 $\angle BCD$ 的度數為\_\_\_\_\_。



答： $48^\circ$

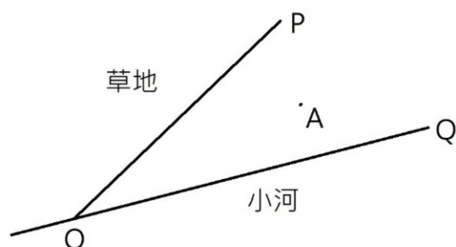
12. 已知方程式 $x^2 - 2bx - 3c = 0$ 中， $b, c$ 的值為取自 $1, 2, 3, \dots, 29, 30$ 這30個數字，若這個方程式至少有一個根也是取自 $1, 2, 3, \dots, 29, 30$ 這30個數字，則滿足上述條件的方程式個數共有\_\_\_\_\_。

答：40

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如下圖，草地邊緣  $OP$  與小河河岸  $OQ$  在點  $O$  處形成  $30^\circ$  的夾角，牧馬人從  $A$  地出發，先讓馬到草地吃草，然後再去河邊飲水，最後回到  $A$  地。已知  $OA = 3\text{km}$ 。請在圖中找出最短的一條路線，使所行走的路程成為最短，並求出此最短的路徑長度。



### 【參考解答】

作點  $A$  對稱於  $OP$ 、 $OQ$  的對稱點  $A'$ 、 $A''$ ，

連接  $A'$  與  $A''$ ，分別交  $OP$ 、 $OQ$  於  $B$ 、 $C$  兩點，路徑  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  即為所求。

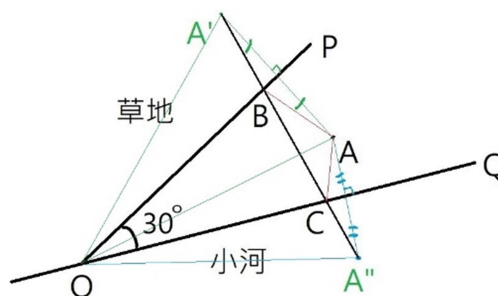
$\because OP$  垂直平分  $AA'$ ；  $\therefore OA' = OA$ ,  $\angle A'OB = \angle BOA$  ①

同理，  $OA = OA''$ ,  $\angle AOC = \angle COA''$  ②

$\because \angle BOC = 30^\circ$  加以①②得  $\triangle A'OA''$  為正三角形，

得  $OA = A'A''$ ，又  $AB = A'B$ ,  $AC = A''C$

可得最短的路徑值  $AB + BC + CA = A'A'' = OA = 3\text{km}$



2. 已知正整數  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  互不相等，且  $x_i < x_{i+1}$  其中  $1 \leq i \leq 9$ ，並滿足  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 \leq 2019$ ，試求  $x_8 - (x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1)$  的最大值。

### 【參考解答】

由已知條件得  $x_i \geq i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，且  $x_9 \geq x_8 + 1$ ,  $x_{10} \geq x_8 + 2$ 。

則  $1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 + x_8^2 + (x_8 + 1)^2 + (x_8 + 2)^2 \leq 2019$ 。

展開並整理得  $3x_8^2 + 6x_8 + 145 \leq 2019 \Rightarrow 3x_8^2 + 6x_8 - 1874 \leq 0$

$\Rightarrow x_8^2 + 2x_8 - 624 \frac{2}{3} \leq 0 \Rightarrow x_8 \leq 24$ 。

當  $x_8 = 24$  時滿足要求，

所以  $x_8 - (x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1)$  的最大值為  $24 - (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 9$

3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{34}$ 是34個皆小於153的正整數，且 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{34}$ ，今任意取兩個數為一組並計算出差的絕對值，試證：這些差的絕對值中至少有5組是相同的。

【參考解答】

假設這些差沒有5組是相同的，則至多有4組是相同的

依照  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{34}$ ，考慮下列差

$a_{34} - a_{33}, a_{33} - a_{32}, \dots, a_2 - a_1$ ，

這33組數的差中沒有5組是相同的，

所以這33組差中至少有9組不同的差（ $\because 33 > 8 \times 4$ ）

因此得： $153 > a_{34} - a_1 = (a_{34} - a_{33}) + (a_{33} - a_{32}) + \dots + (a_2 - a_1)$   
 $= 9 + (8 + 8 + 8 + 8) + (7 + 7 + 7 + 7) + \dots + (1 + 1 + 1 + 1) = 153$

產生矛盾，

所以假設是錯的。得證。