

# 高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

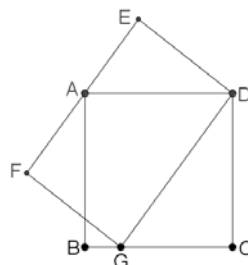
作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

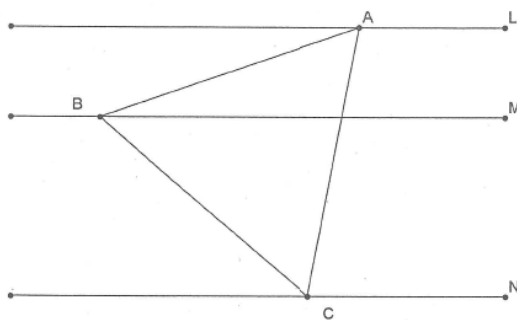
1. 某國中上學年度女生人數與男生人數比為 2:5，今年女生人數增加 25%，男生人數減少 20%，則今年該校女生和男生的人數比為 \_\_\_\_\_。5:8
2. 今有 200 人挑選橘子、棗子、柳丁三種水果，如果每人可選 1 種、2 種或 3 種水果，且選相同水果的人至少有  $k$  個人，則  $k =$  \_\_\_\_\_。29
3. 已知  $m$  為正整數，若 63 是  $10^m - 1$  的因數，則  $m$  的最小值為 \_\_\_\_\_。6
4. 如圖， $G$  是邊長為 8cm 的正方形  $ABCD$  邊上一點，矩形  $DEFG$  的邊  $\overline{EF}$  通過  $A$  點，已知  $\overline{GD} = 10\text{cm}$ ，則  $\overline{FG}$  的長度為 \_\_\_\_\_。32/5



5. 小明將一個大長方形切割成 6 塊小長方形  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  (如下圖)，已知長方形  $A$  的面積為 12， $B$  的面積為 18， $C$  的面積為 6， $D$  的面積為 15；令長方形  $E$  與長方形  $F$  之面積分別為  $p$  和  $q$ ，則  $p + q =$  \_\_\_\_\_。30

A	B	C
D	E	F

6. 設  $a, b, c$  均為實數，已知  $a + 2b + 3c = 4$  且  $2ab + 6bc + 3ac = 5$ ，若  $c$  的最大值為  $M$ ， $c$  的最小值為  $m$ ，則  $M + m =$  \_\_\_\_\_。8/9
7. 若從  $3, 6, 9, \dots, 2013, 2016$  這些 3 的倍數中，至少取出  $n$  個不重複的數，使得該組不重複的  $n$  個數一定有兩個數的和為 2040，則  $n =$  \_\_\_\_\_。341
8. 設  $a, b, c, d$  均為正整數，且  $a \neq 3b \neq 4c$ 。若  $a + 3b = (d + 3)^2$ ， $3b + 4c = (d + 1)^2$ ， $4c + a = (d + 2)^2$ ，則  $a + b + c + d$  的最小值為 \_\_\_\_\_。69
9. 下圖是三條互相平行的直線  $L, M, N$ 。其中  $L, M$  距離為 1， $M, N$  距離為 2。若  $\triangle ABC$  的三頂點分別在三條平行線上且  $\triangle ABC$  為正三角形，則正三角形  $ABC$  的邊長為 \_\_\_\_\_。  $2\sqrt{21}/3$



10. 已知  $m, n$  為正整數，若  $x = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{m})(1 + \frac{1}{m})$ ，  
 $y = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})$  且  $x - y = \frac{1}{34}$ ，  
 則  $m + 2n$  的值為 \_\_\_\_\_。560
11. 已知圓  $O$  的半徑為  $a$ ，若在圓  $O$  中放入  $n$  個點  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，使得這  $n$  個點中，任意兩點之間的距離  $A_i, A_j (1 \leq i, j \leq n)$ ，都大於  $a$ ，則  $n$  的最大值為 \_\_\_\_\_。5
12. 已知  $k$  為正數並滿足  

$$\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{3^2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2016^2}{4031 \times 4033} = 1008 \times k$$
  
 則  $k =$  \_\_\_\_\_。2017/4033

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如果在正整數 1、2、3、 $\dots$ 、105 中最多可以選出  $n$  個正整數，使得所選出的  $n$  個正整數中的任兩個數之差都不是質數，試求  $n$  之值。

### 【參考解答】

因正整數中最小的合數為 4，

故將 1、2、3、 $\dots$ 、105 這些數依照被 4 除之後所得的餘數分類：

$\{1, 5, 9, \dots\}; \{2, 6, 10, \dots\}; \{3, 7, 11, 15, \dots\}; \{4, 8, 12, \dots\}$

可知除了其中一類有 27 個數以外，其餘每一類都會有 26 個數。

此時若選擇有 27 個數的一類，則當中任二個數之差為 4 的倍數，

即不會是質數而滿足題意。故總共至多能選出 27 個數，

例如選擇 1、5、9、 $\dots$ 、 $4n+1$ 、 $\dots$ 、105 這 27 個數。

2. 若  $x_1$ 、 $x_2$  為方程式  $(a^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - (2a+7)\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = 0$  的兩實數根，且滿

$$\text{足 } \frac{x_1}{x_1-1} + \frac{x_2}{x_2-1} = \frac{3}{11}, \text{ 試求 } a \text{ 之值。}$$

【參考解答】(1) 設  $\frac{x}{x-1} = t$ ，則原方程式可化為  $(a^2-1)t^2 - (2a+7)t + 1 = 0$

- ① 當  $a^2-1=0$ ，即  $a=\pm 1$  時，方程式為  $-9t+1=0$  或  $-5t+1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{9}$  或  $t=\frac{1}{5}$

所以， $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{9}$  或  $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{5}$  解得  $x = -\frac{1}{8}$  或  $x = -\frac{1}{4}$ 。故當  $a=\pm 1$  時，原方程式有實數根

- ② 當  $a \neq \pm 1$  時，則在判別式  $\Delta \geq 0$  時，原方程式有實數根。

$$\text{由 } \Delta = [-(2a+7)]^2 - 4(a^2-1) \geq 0 \text{ 解得 } a \geq -\frac{53}{28}。$$

綜合①②：當  $a \geq -\frac{53}{28}$  時，原方程式有實數根。

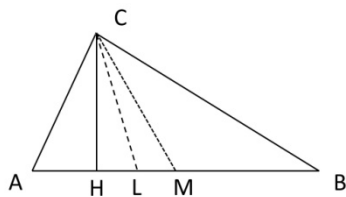
- (2) 由題意知： $\frac{x_1}{x_1-1}$  與  $\frac{x_2}{x_2-1}$  是方程式  $(a^2-1)t^2 - (2a+7)t + 1 = 0$  的兩根，

利用根與係數關係得： $\frac{2a+7}{a^2-1} = \frac{3}{11}$ ，整理得

$$3a^2 - 22a - 80 = 0 \Rightarrow a_1 = 10, a_2 = -\frac{8}{3}$$

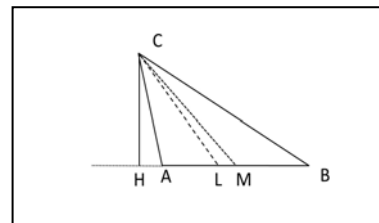
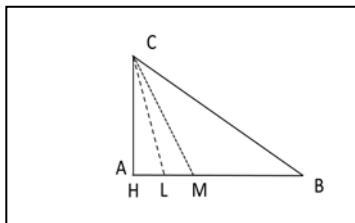
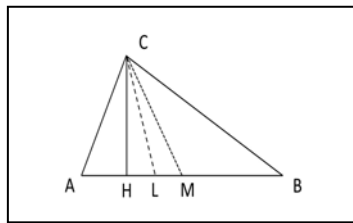
由(1)知  $a \geq -\frac{53}{28}$ ，故  $a = 10$

3. 已知 $\triangle ABC$  中， $BC > AC$ ，通過頂點  $C$  的高(垂線)、內角分角線、中線分別交線段  $AB$  於  $H$ 、 $L$ 、 $M$  點且  $L$  點在  $H$  點和  $M$  點之間。若此三線將  $\angle ACB$  等分成相等的四個角，試求 $\triangle ABC$  中  $\angle A$ ， $\angle B$  及  $\angle C$  的度數。



【參考解答】

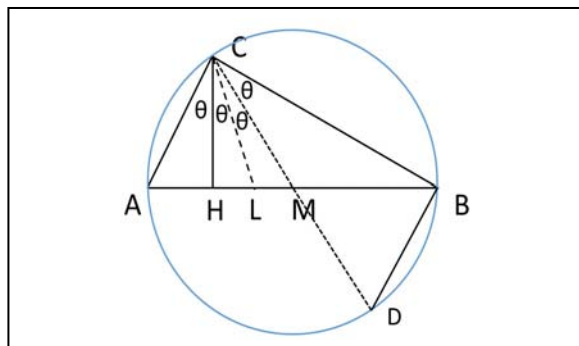
考慮  $\angle A$  的三種情形：銳角，直角，鈍角，如圖



已知  $L$  點在  $H$  點和  $M$  點之間，且垂線、分角線、中線將  $\angle ACB$  等分成相等的四個角，所以  $\angle A$  只能是銳角。

設此四個相等的角為  $\angle ACH = \angle HCL = \angle LCM = \angle MCB = \theta$ 。

考慮  $\triangle ABC$  外接圓如圖：



延伸  $CM$  中線交外接圓於  $D$  點，所以  $\angle CAB = \angle CDB$ 。

$\because CH \perp AB$ ，而  $\angle CAB = \angle CDB = 90^\circ - \theta$ ， $\therefore \angle CBD = 90^\circ$ ，並有  $CD$  為直徑。

由於  $AM = BM$  (中線)， $\angle CMA = \angle DMB$ ， $\angle CAM = \angle MDB \Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle BMD$  (AAS)。

可得  $AM = BM = CM = DM$ ， $\therefore M$  為圓心， $AB$  為直徑，於是  $\angle ACB = \angle C = 90^\circ$

由  $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\theta = 22.5^\circ$ ，求得  $\angle A = \angle CAB = 90^\circ - \theta = 67.5^\circ$ 。

$\angle B = \angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$ 。

所以，三角形  $ABC$  三個內角  $\angle A = 67.5^\circ$ ， $\angle B = 22.5^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ 。