

高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 一組正整數的平均是 15，若加入一個正整數 39，則其平均數為 17，問原來共有幾個正整數？_____ Ans: 11

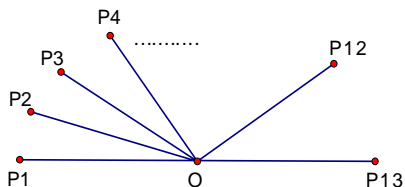
2. 設 $A = 20142014 \cdots 2014$ (重覆 2014 次)，則 A 除以 11 的餘數為_____。 Ans: 1

3. 已知關於 x 的方程 $x^2 - (2a-1)x + a = 5$ 的一個解是 1，則 a 的值是_____。 Ans: -3

4. 設 $B = (937^{937} + 572^{572}) \times 493^{493}$ ，則 B 的個位數字為_____。 Ans: 9

5. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，若 E 、 F 分別為邊 BC 、 CD 上的點，且滿足 $BE=CF$ ，則 $\triangle AEF$ 面積的最小值為_____。 Ans: $\frac{3}{8}$

6. 如下圖，已知 P_1, O, P_{13} 在同一直線上，而 $\angle P_3OP_2 - \angle P_2OP_1 = \angle P_4OP_3 - \angle P_3OP_2 = \cdots = \angle P_{13}OP_{12} - \angle P_{12}OP_{11} = 6^\circ$ ，則 $\angle P_{13}OP_{12}$ 的度數為_____。



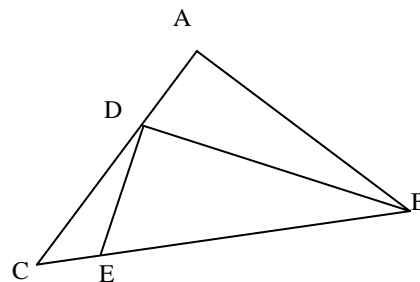
Ans: 78 或 108

7. 設 p 、 q 均為比 10 大的正整數且滿足 $p + q + pq = 2014$ ，則 $p + q$ 的最小值為_____。 Ans: 94

8. 設 $N = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{144\sqrt{143}+143\sqrt{144}}$,
 則 $N =$ _____。

Ans: $\frac{11}{12}$

9. 右圖中，已知 $AB = AC = 3$ 單位，
 $\angle BAC = \angle BDE = 90^\circ$ ， $AC = 3AD$ ，
 則 $\triangle BDE$ 的面積為_____平方單位。



Ans: $\frac{5}{2}$

10. 設 d 是大於 1 的正整數，若用 d 分別去除 1501, 2314, 和 5295 均得到相同的餘數 r ，則 $d + r$ 的值為_____。

Ans: 417

11. 在一個走廊上依次序懸掛著編號為 1, 2, 3,, 103 的路燈。每個路燈各自被一個開關所控制，開關每被按一次就會改變其狀態，由開轉關或由關轉開。最初每盞燈都是開著的，但按下列規則變化。第一次是所有的開關皆被按一次，第二次是所有編號為 2 的倍數之開關皆被按一次，依此類推，第 k 次是所有編號為 k 的倍數之開關皆被按一次，直到第 103 次的開關被按完為止，哪麼按完第 103 次的開關時有多少路燈仍是亮著?_____

Ans: 93

12. 若 a, b, c 為三個正實數且滿足 $b(a-1) = c(b-3) = a(c-5) = -1$ ，則 abc 之值為_____。

Ans: $3 \pm 2\sqrt{2}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 小傑準備參加數學競賽，研擬出一套參賽計畫。

- (1) 考前 103 天開始，每天至少做 1 題，至多做 18 題數學問題。
- (2) 若某一天做超過 10 題，接下來的連續 3 天，每天至多做 7 題。
- (3) 若某一天做不到 7 題，則接下來的連續 2 天，每天至少做 10 題。

若同時滿足這三個條件，103 天內他最多可以做幾題，最少可以做幾題？

【參考解答】

先考慮第二情形，若有某一天做超過 10 題，也就是假設他做了最多的一天 18 題，接下來三天最多可以做 21 題，則四天總共就做了 39 題，小於平均每天做 10 題的數量，故每天做 10 題為最多，102 天後可以做 1020 題，第 103 天可以做 18 題，所以 103 天最多 1038 題。

考慮第三情形，若有某一天做不到 7 題，也就是假設他做了最少的一天 1 題，接下來兩天至少要做 20 題，則三天總共就做了 21 題，剛好等於平均每天做 7 題的數量，故平均每天做 7 題為最少，102 天後可以做 714 題，第 103 天只作 1 題，所以是 715 題。

- 2.(a) 試將 $0, 1, 2, \dots, 14$ 這 15 個連續整數分成 3 堆，使得每堆的個數相同，且每堆的數字總和也相同。
- (b) 利用(a)的結果，將 225 個連續整數分成 9 堆，使得每堆的個數相同，且每堆的數字總和也相同。

【參考解答】

(a)可假設這 15 個連續整數為 0 至 14。
將其分為下列 3 堆即可

$$S_1 = \{0, 3, 6, 12, 14\}$$

$$S_2 = \{1, 4, 7, 10, 13\}$$

$$S_3 = \{2, 5, 8, 9, 11\}$$

每堆的數字總和皆為 35。

(b) 可假設這 225 個連續整數為 0 至 224，且將每個數字以 $a \cdot 15 + b$ 的形式表達，其中 $0 \leq a, b \leq 14$ 。

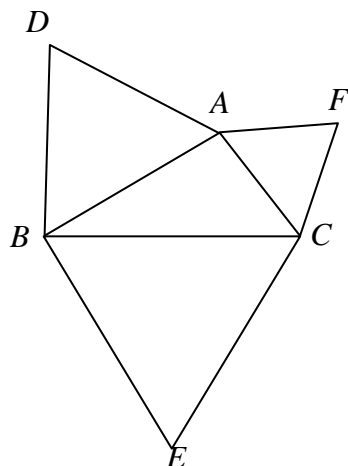
利用(a)之結果，將這些數分為九堆

$$S_{i,j} = \{a \cdot 15 + b : a \in S_i, b \in S_j\}, 1 \leq i, j \leq 3。$$

例如 $S_{1,1} = \{0, 3, 6, 12, 14, 45, 48, 51, 57, 59, 90, 93, 96, 102, 104, 180, 183, 186, 192, 194, 210, 213, 216, 222, 224\}$

每堆的數字總和為 2800。

3. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 三個邊 AB, BC, CA 向外分別作三個等邊三角形 $\triangle ABD$ ， $\triangle BCE$ ， $\triangle ACF$ 。若 $\angle ACB = 60^\circ$ ，試證明： $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACF}$ 。



【參考解答】

(1) 過點 A 作 $\overline{AM} \parallel \overline{FC}$ 交 \overline{BC} 於點 M ，連接 \overline{DM} ， \overline{EM} 。

$$\because \angle ACB = 60^\circ = \angle CAF \Rightarrow \overline{AF} \parallel \overline{MC}$$

\therefore 四邊形 $AMCF$ 為平行四邊形

$$\because \overline{FA} = \overline{FC} \Rightarrow \text{平行四邊形 } AMCF \text{ 為菱形}$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{CM} = \overline{AM} \text{ 且 } \angle MAC = 60^\circ$$

(2) 在 $\triangle BAC$ 與 $\triangle EMC$ 中，

$$\because \overline{CA} = \overline{CM}, \angle ACB = \angle MCE, \overline{CB} = \overline{CE}$$

$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle EMC \Rightarrow \overline{BA} = \overline{EM}$$

(3) 在 $\triangle ADM$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \overline{AM} = \overline{AC}, \angle DAM = \angle BAC, \overline{DA} = \overline{BA}$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ABC \Rightarrow \overline{DM} = \overline{BC}$$

由(2)與(3)得 $\overline{DM} = \overline{BE}$ 且 $\overline{DB} = \overline{EM}$ ，所以四邊形 $DBEM$ 為平行四邊形。我們可證得： $S_{\triangle BDM} + S_{\triangle DAM} + S_{\triangle MAC} = S_{\triangle BEM} + S_{\triangle EMC} + S_{\triangle ACF}$

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACF}。$$

