

高雄市 100 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

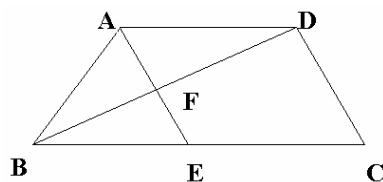
編號: _____ 校名: _____ 國中 _____ 姓名: _____

性別: ☐ 男 ☐ 女

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 設 $2^{11} \times 8^{13} \times 5^{10}$ 相乘之後為 n 位數，則 $n =$ _____。 **Ans: $n=23$**
2. 將 2012 分解成若干個不同的正偶數之和，試問最多能分解成幾項？ _____
Ans:44
3. 設 $x + \frac{1}{y} = 1$ 且 $y + \frac{1}{z} = 1$ ，則 xyz 的值為 _____。 **Ans:-1**
4. 已知 n 為正整數，若 $\frac{n+1}{13-n}$ 為一個正的質數，則 n 的值為 _____。 **Ans:12**
5. 從西元 2012 年後，試問第一個成為三個連續正整數乘積的西元年份是哪一年？
_____ **Ans:2184**
6. 試問小於 9999 的所有正整數中，有多少個正整數其所有位數的數碼乘積等於 84？
_____ **Ans:72**
7. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 為 BC 邊上一點使得 $AD = EC$ ，對角線 BD 及線段 AE 交於 F 點，設 $BC = kAD$ ，若梯形 $ABCD$ 的面積為 360 且 $\triangle ADF$ 的面積為整數，令 k 的所有可能值之和為 S ，則 $S =$ _____。
Ans:31



8. 已知實數 x, y, z 滿足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$,
則 $3x + 2y + z =$ _____。 **Ans:33**

9. 設 $\underbrace{11 \cdots 1}_{2012 \text{ 個 } 1} \times \underbrace{33 \cdots 3}_{2012 \text{ 個 } 3}$ 相乘後的積為 N ，則 N 的所有數碼之和為 _____。 **Ans:18102**

10. 設 x 為一實數， $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如 $[3.5]=3$ ， $[5]=5$ ，則

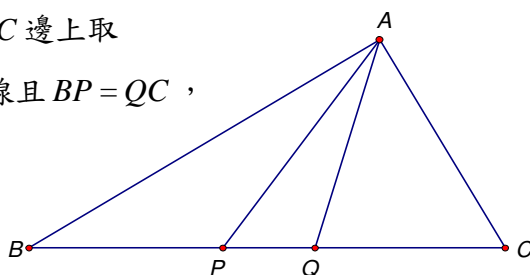
$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{2012}]=\underline{\hspace{2cm}}。 \text{Ans:}59202$$

11. 有一次有 101 個人參加宴會，其中共有 a 位女性，這 a 位女性中，將認識宴會中男性的人數從少到多排列，會形成一個公差為 3 首項是 8 的等差數列，而且有一位女性認識所有男性，換言之，有一位女性認識 8 位男性，並有一位女性認識 11 位男性，……，直到最後一位女性認識所有男性，則參加宴會的男性人數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 **Ans:77**
(請寫出不含 a 的正確數字)

12. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=20, AC=12$ 。若在 BC 邊上取兩點 P 和 Q ，使得線段 AQ 成為 $\angle BAC$ 的角平分線且 $BP=QC$ ，

則 $\sqrt{AP^2 - AQ^2}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans:8



第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 已知 k 為整數且方程式 $2x^2 + kx + k^2 - x + 2k + 1 = 0$ 中的變數 x 有兩個相異的整數解，試求 x 的兩個整數解。

【參考解答】：

$$\text{原式} = 2x^2 + (k-1)x + k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$\text{判別式 } \Delta = (k-1)^2 - 8(k+1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-9-4\sqrt{2}}{7} < k < \frac{-9+4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow k = -1, \text{ 或 } k = -2$$

$$\text{當 } k = -2 \text{ 時, 代入原式得 } 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1) = 0$$

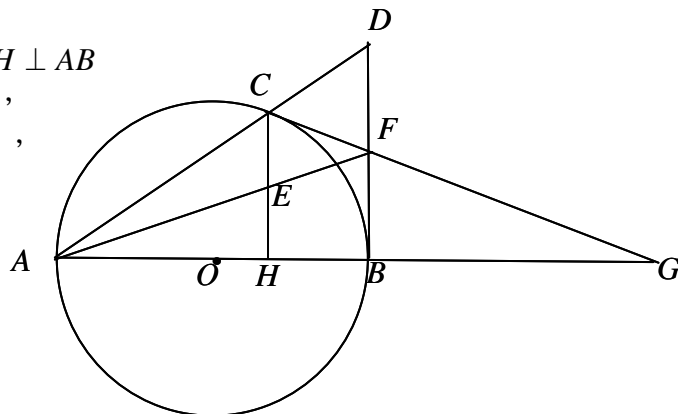
$$\text{解得 } x = 1 \text{ 或 } x = \frac{1}{2} \text{ (不合)}$$

$$\text{當 } k = -1 \text{ 時, 代入原式得 } 2x^2 - 2x = 2x(x-1) = 0$$

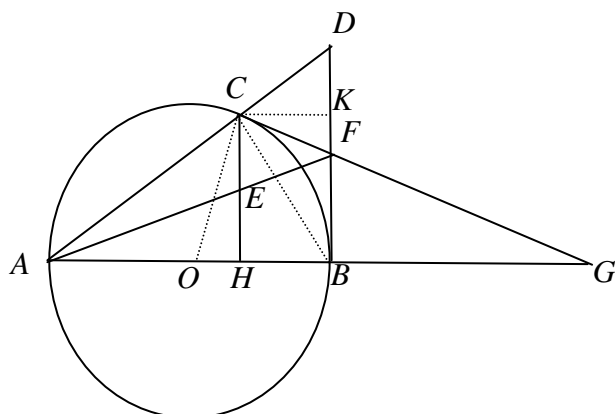
$$\text{解得 } x = 0 \text{ 或 } x = 1 \text{ (符合)}$$

故所求 x 的兩個整數解為 0, 或 1

2. 設 AB 為圓 O 的直徑， C 為圓 O 上一點，若 $CH \perp AB$ 於點 H ，直線 AC 與過 B 點的切線相交於點 D ， E 為 CH 的中點，連接 AE 並延長交 BD 於點 F ，直線 CF 交直線 AB 於點 G 。試求 $\triangle OCF$ 面積： $\triangle OFG$ 面積：圓 O 面積的比。



【參考解答】



$CH \perp AB$ ， $DB \perp AB$ 所以 $\triangle AEH \sim \triangle AFB$ ， $\triangle ACE \sim \triangle ADF$

$$\therefore \frac{EH}{BF} = \frac{AE}{AF} = \frac{CE}{FD} \quad \because HE = EC \quad \therefore BF = FD$$

連接 CB ， OC $\because AB$ 是直徑 $\therefore \triangle BCD$ 為直角三角形

$\because F$ 為 BD 的中點 $\Rightarrow \angle BCF = \angle CBF$ ，

$\therefore \angle OCG = \angle OCB + \angle BCF = \angle OBC + \angle CBF = 90^\circ$ ($\because DB \perp AB$)

所以， CG 是圓 O 的切線。

在 BD 上取一點 K 使得 $CK \parallel HB$

$\triangle OCF$ 面積： $\triangle OFG$ 面積 = $CF : FG = FB : FG = FK : CF$

令 $CH = h$ ， $FB = s$ ， $CK = t$ ，因此 $KF = h - s$

$$s^2 = t^2 + (h - s)^2, \text{ 得 } s = \frac{t^2 + h^2}{2h}$$

$$CF : FG = h - s : s = h^2 - t^2 : h^2 + t^2$$

不失其一性，設半徑長為 1，故 $(1 - t)^2 + h^2 = 1$ ， $h^2 = 2t - t^2$


$$\text{因此 } CF : FG = 1 - t : 1, \text{ 且 } s = \frac{t}{\sqrt{2t - t^2}}$$

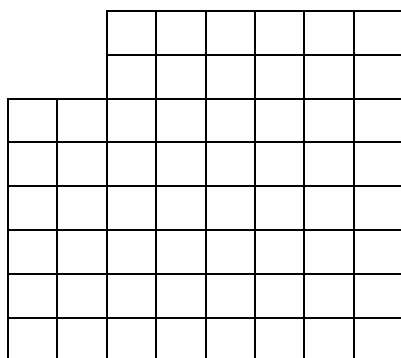
$$\triangle OFG \text{ 面積：圓 } O \text{ 面積的比} = \frac{1}{2}s : \pi = 1 : \frac{2\pi}{s} = 1 : \frac{2\pi\sqrt{2t - t^2}}{t}$$

$$\text{故 } \triangle OCF \text{ 面積：} \triangle OFG \text{ 面積：圓 } O \text{ 面積} = 1 - t : 1 : \frac{2(1 - t)\pi\sqrt{2t - t^2}}{t}$$

令 $OH = a$

$$\text{所以 } \triangle OCF \text{ 面積：} \triangle OFG \text{ 面積：圓 } O \text{ 面積} = a : 1 : \frac{2a\pi\sqrt{1 - a^2}}{a + 1}$$

3. 將 8×8 方格紙板的一角剪去一個 2×2 的正方形(如下圖)，試問剩下的 60 個方格能否剪成 15 塊形如  的四連格小紙片？如果可以，請在圖上畫出剪成 15 塊的圖形；如果不可以，請說明理由。




【參考解答】：

將上圖 60 個小方格分別標示 +1 或 -1

(如下圖，奇數行的小方格標示 +1，數行的小方格標示 -1)，則任一符合要求的四連格中的數字之和為 2 或 -2。

		+1	-1	+1	-1	+1	-1
		+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

假設上圖 60 個小方格能剪成 15 塊符合要求的四連格 

設其中數字和為 2 的四連格有 m 塊，數字和為 -2 的四連格有 n 塊，

則 $m + n = 15$

$$2m + (-2)n = 0$$

$$\text{解得 } m = \frac{15}{2}, n = \frac{15}{2}.$$

求得 m, n 不是整數，造成矛盾。故上圖 60 個小方格不能剪成 15 塊四連格 .