

高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

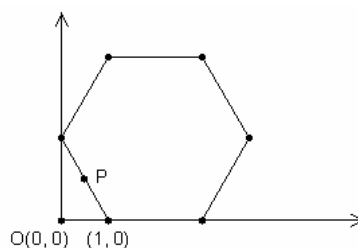
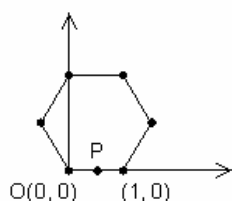
隊際賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分，共 200 分

1. 一個邊長為 1 單位的正六邊形置於座標軸上，如左下圖所示， P 點為六邊形中一邊的中點，其座標為 $(1/2, 0)$ 。將此正六邊形向右滾動，每滾動一次就向右移動一個邊長的長，同時正六邊形的每一邊邊長會增加 1 單位， P 點仍然是該邊的中點，如右下圖是第一次滾動後的結果。當此正六邊形向右滾動 100 次後，試求 P 點的座標。



【參考解答】

$1+2+\dots+100+101=5151$ 為底邊最右邊端點的 x 座標。

$$100 = 6 \times 16 + 4$$

P 點位於六邊形的右上方的邊上。

P 點的 x 座標是 $101/4 + 5151$

P 點的 y 座標是 $3/2 \times 101\sqrt{3}/2 = 303\sqrt{3}/4$

高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 _____ 姓名: _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分，共 200 分

2. 小傑有一塊邊長為 $6\sqrt{2}m$ 的正方形土地，去年他已在土地的正中心位置挖了一個半徑長為 $2m$ 的圓形圖案種植玫瑰花。今年小傑準備在土地的四個角落各挖一個圓形圖案種植香草，問每個圓形圖案的最大面積為何？

【參考解答】

(1) 設正方形土地為 $ABCD$ ，兩對角線的交點為 O ，連接 \overline{OD} ，以 O 為圓心， $2cm$ 為半徑作圓交 \overline{OD} 於 G 。

(2) 過 G 作 $\overline{EF} \perp \overline{OD}$ 交 \overline{AD} ， \overline{DC} 於 E ， F 。則 $\overline{DE} = \overline{DF}$

(3) $\triangle DEF$ 之內切圓 H 即為所求。

(4) 內切圓 H ：

$$(a) \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$$

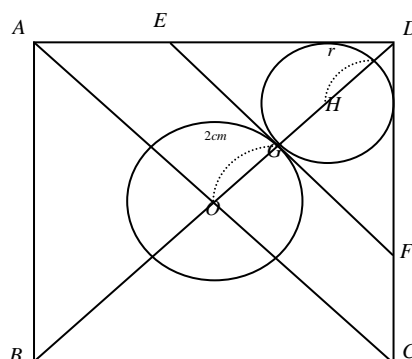
$$\Rightarrow \overline{DG} = \frac{1}{2}\overline{BD} - \overline{OG} = 4, \quad \overline{DE} = \overline{DF} = 4\sqrt{2}, \quad \overline{EF} = 8$$

(b) 設圓 H 的半徑長為 r ，則

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times r \times (8 + 2 \times 4\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{2} + 1} = 4(\sqrt{2} - 1) \text{ (cm)}$$

$$(c) \text{所求之最大圓面積} = \pi r^2 = 16(3 - 2\sqrt{2})\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

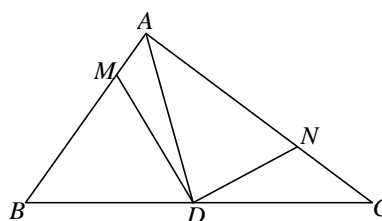
隊際賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分，共 200 分

3. 已知 \overline{AD} 是 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的中線， M, N 分別在 AB, AC 邊上且 $\overline{MD} \perp \overline{ND}$ 。已知 $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{BM} = 5\sqrt{3}$ ， $\overline{CN} = 5$ ， $\overline{DM} = 8$ ， $\overline{DN} = 6$ ，試求 \overline{AD} 之值。



【參考解答】

如右圖，連接 \overline{MN} 。

在射線 \overline{ND} 上取一點 P ，使得 $\overline{DP} = \overline{DN}$ ，再連接 \overline{BP} ， \overline{MP} 。

$$\because \angle 1 = \angle 2, \overline{BD} = \overline{DC}, \overline{DP} = \overline{DN}$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CND \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \overline{BP} = \overline{CN} = 5, \overline{DP} = \overline{DN} = 6 \text{ 且 } \angle DBP = \angle DCN$$

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{BP}$$

$$\because \overline{MD} \perp \overline{ND} \therefore \angle MDN = \angle MDP = 90^\circ$$

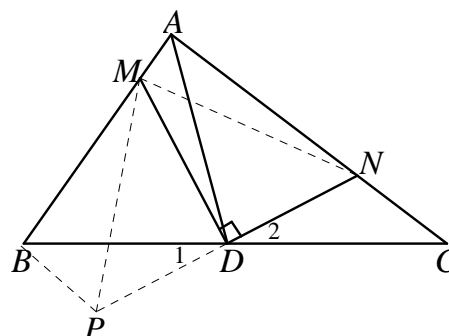
$$\text{故 } \overline{MP} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{DM}^2} = \sqrt{\overline{DN}^2 + \overline{DM}^2} = 10$$

$$\because \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 = 100 = \overline{MP}^2$$

$$\therefore \angle MBP = 90^\circ$$

$$\because \overline{AC} \parallel \overline{BP} \therefore \angle BAC = 90^\circ \text{ (同側內角互補)}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 是直角三角形。}$$

故可求得 $\overline{AD} = 9$



高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分，共 200 分

4. 設 α, β 為正整數，且 $\frac{52}{199} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{59}$ ，當 β 有最小值時，

試求 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的值。

【參考解答】 $\frac{52}{199} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{59} \Leftrightarrow \frac{59}{16} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{199}{52} \Leftrightarrow 3 + \frac{11}{16} < \frac{\beta}{\alpha} < 3 + \frac{43}{52}$

因為 $\frac{\beta}{\alpha} > 3$ 且 $\frac{\beta}{\alpha} < 4 \Leftrightarrow 3\alpha < \beta < 4\alpha$

設 $\beta = 3\alpha + x$ ， $0 < x < \alpha$

則 $\frac{11}{16} < \frac{x}{\alpha} < \frac{43}{52} \Leftrightarrow \frac{52x}{43} < \alpha < \frac{16x}{11}$ ，其中 α, x 為正整數

因此，欲取 β 為最小值即滿足此不等式的的最小 x 值且其值為 3

$\Rightarrow \alpha = 4$ ， $\beta = 3\alpha + x = 15$ ， $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{15}$

如果 $x \geq 4$ ，則 $\alpha > \frac{52x}{43} \geq \frac{52 \cdot 4}{43} = \frac{208}{43} = 4 + \frac{36}{43}$ 且 $\alpha \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \alpha \geq 5$ $\beta = 3\alpha + x \geq 3 \cdot 5 + 4 = 19$ （此時 β 不是最小值）

故當 β 為最小時 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{15}$

高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 一小時

每題各 40 分，共 200 分

5. 有十根木棒，其長度分別為 1, 2, 3, ..., 10。今從中取出若干根木棒，在不將木棒折彎的情況下，利用取出的木棒圍成正方形(例如:取出 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 恰可圍出一個邊長為 9 的正方形)，試問總共有幾種取法可圍成正方形？

【參考解答】

因 $(1+2+3+\cdots+10)/4 = 55/4 \leq 13$ 。故正方形的邊長 ≤ 13 。

若邊長為 13，共 2 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $10+3=9+4=8+5=7+6$ 。共 1 種選法。

某邊由三個木棒所組成，則該邊必為

$6+4+3=6+5+2=7+4+2=7+5+1=8+3+2=8+4+1=9+3+1=10+2+1$ 其中之一。取法為 $10+2+1=9+4=8+5=7+6$ 。共 1 種選法。

若某邊由四個木棒所組成，則該邊必為 $7+3+2+1=6+4+2+1=5+4+3+1$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 12，共 2 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $10+2=9+3=8+4=7+5$ 。共 1 種選法。

某邊由三個木棒所組成，則該邊必為

$5+4+3=6+4+2=6+5+1=7+3+2=7+4+1=8+3+1$ 其中之一。取法為

$6+5+1=10+2=9+3=8+4$ 。共 1 種選法。

若某邊由四個木棒所組成，則該邊必為 $6+3+2+1=5+4+2+1$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 11，共 5 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $10+1=9+2=8+3=7+4=6+5$ 。共 5 種選法。

某邊由三個木棒所組成，則該邊必為 $5+4+2=6+3+2=6+4+1=7+3+1=8+2+1$ 其中之一。無法與剩下的邊組成正方形。

若某邊由四個木棒所組成，則該邊必為 $1+2+3+5$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 10，共 7 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $10=9+1=8+2=7+3=6+4$ 。共 5 種選法。

某邊由三個木棒所組成，則該邊必為 $5+4+1=5+3+2$ 其中之一。取法為

$5+4+1=10=8+2=7+3$ 或 $5+3+2=10=9+1=6+4$ 。共 2 種選法。

若某邊由四個木棒所組成，則該邊必為 $1+2+3+4$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 9，共 5 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $9=8+1=7+2=6+3=5+4$ 。共 5 種選法。

若某邊由三個木棒所組成，則該邊必為 $2+3+4$ 、 $1+3+5$ 或 $1+2+6$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 8，共 1 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $8=7+1=6+2=5+3$ 。共 1 種選法。

若某邊由三個木棒所組成，則該邊必為 $1+2+5$ 或 $1+3+4$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長為 7，共 1 種選法。

每邊至多由兩個木棒組成，則有 $7=6+1=5+2=4+3$ 。共 1 種選法。

若某邊由三個木棒所組成，則該邊必為 $1+2+4$ 。無法與剩下的邊組成正方形。

若邊長 ≤ 6 ，則沒有可能的選法。

故選法共有 23 種。