

# 高雄市 99 學年度國民中學數學競賽

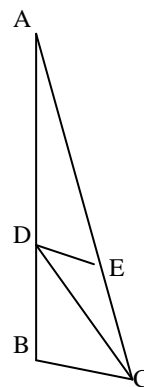
## 個人賽試題

編號: \_\_\_\_\_ 校名: \_\_\_\_\_ 國中 \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

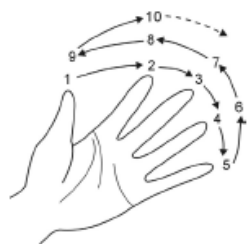
作答時間: 二 小 時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

1.  $18^{2011}$  之值的個位數字為\_\_\_\_\_。 Ans: 2
2. 設  $N = 9 \times 99 \times 999 \times \dots \times \underbrace{999 \dots 9}_{999 \text{ 個 } 9}$ , 則  $N$  除以 1000 的餘數為\_\_\_\_\_。 Ans: 109
3. 設  $\frac{q}{p}$  為一個正分數, 若  $\frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{41}{20}$ , 則  $\frac{q}{p} - \frac{p}{q} =$ \_\_\_\_\_。 Ans:  $\pm \frac{9}{20}$
4. 設  $P = 4\square\square 1$  代表一個四位數, 其千位數為 4, 個位數為 1;  $Q = \square 2\square$  代表一個三位數, 其十位數為 2, 若  $P \div 13 = Q$ , 則  $P =$ \_\_\_\_\_。 Ans: 4251
5. 右下圖  $\triangle ABC$  中, 已知  $\angle BAC = \angle CDE = \angle BCD$  且  $\overline{AB} = 3\overline{BC}$ , 設  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADE$ ,  $\triangle BCD$  的周長分別為  $a, b, c$ , 則  $\frac{b+c}{a}$  之值為\_\_\_\_\_。 Ans:  $\frac{11}{9}$



6. 伸出你的左手, 如下圖所示依序數數字:  
(大拇指→食指→中指→無名指→小指→無名指→中指→食指→大拇指→食指→...)  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...



試問數到 2011 時應停在哪個手指頭? \_\_\_\_\_

Ans: 中指

7. 設  $(1+x+x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{19}x^{19} + a_{20}x^{20}$  ,

則  $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$  的值為\_\_\_\_\_。 Ans: 29525 或  $\frac{3^{10}+1}{2}$

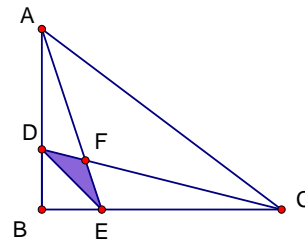
8. 若下列的九個方格可填入適當的數字使得每行、每列及對角線上的數字總和都相等，則  $k$  的值為\_\_\_\_\_。

Ans: 50

	2	
		$k$
26		

9. 已知  $\triangle ABC$  為一直角三角形，其中  $\angle B = 90^\circ$ ，線段  $AB$  長為 3，線段  $BC$  長為 4，點  $D$  是線段  $AB$  上的一點，點  $E$  是線段  $BC$  上的一點。若線段  $BD$  與線段  $BE$  的長均為 1 且線段  $AE$  與線段  $CD$  交於點  $F$ ，則  $\triangle DEF$  的面積為\_\_\_\_\_。

Ans:  $\frac{3}{11}$

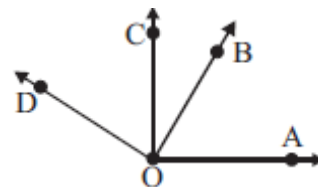


10. 袋子中裝著許多紅色、黃色、白色和黑色的小球。一群人輪流從其中取球，每人一次，每次皆取四個小球。問最少要有幾個人輪流取球才可保證其中有兩人取出每種顏色的小球其個數都相同？\_\_\_\_\_

Ans: 36

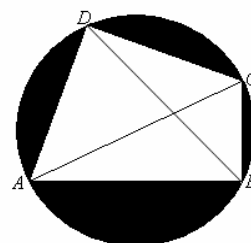
11. 下圖中，已知  $OA \perp OC$  且  $OB \perp OD$ ，若  $\angle AOD$  為  $\angle BOC$  的 3.5 倍，則  $\angle AOD$  的度數為\_\_\_\_\_。

Ans: 140



12. 如右圖，圓內接四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} > \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$ 。已知  $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$  且  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 54\sqrt{10}$ ，則黑色部分面積=\_\_\_\_\_。

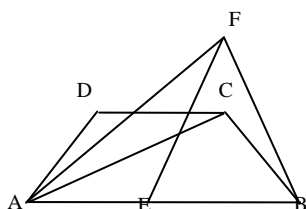
Ans:  $45\pi - 81$



## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 下圖等腰梯形  $ABCD$  中，已知  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ 。若  $E$  為  $\overline{AB}$  上一點， $F$  為梯形  $ABCD$  外部之一點，且  $\overline{FE} = \overline{FB} = \overline{AC}$ ， $\overline{FA} = \overline{AB}$ 。求  $\overline{AE} : \overline{EB}$  之值？



### 【參考解答】

(1) 在不失一般性的前提下，可假設  $\overline{CD} = 1$ ，則  $\overline{AB} = 2$

(2) 過  $C$  作  $\overline{CH} \perp \overline{AB}$  於  $H$

$\therefore \triangle BCH$  為直角三角形， $\angle DAB = \angle CBA = 60^\circ$  且  $ABCD$  為等腰梯形

$$\therefore \overline{BH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{BC} = 1$$

(3)  $\therefore \triangle ABC$  中， $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{AB} = 2$  且  $\angle ABC = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$  為直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{3}$

(4)  $\therefore \overline{AF} = \overline{AB}$ ， $\overline{FE} = \overline{FB}$  且  $\angle ABF = \angle FBE$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle FBE \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{BF}^2}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

2. 已知  $x$  與  $y$  為正整數，試求滿足方程式  $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y - 36 = 0$  的  $x$  與  $y$  之值。

【參考解答】

$$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y - 36 = 0$$

因式分解為：

$$(2x - y)(x + y) - x + 2y - 36 = 0$$

由  $(x + y) - (2x - y) = -x + 2y$  知

$$(2x - y + 1)(x + y - 1) - 35 = 0$$

$(2x - y + 1)(x + y - 1) = 35 = 35 \times 1 = 7 \times 5 = 5 \times 7 = 1 \times 35$  (因  $x + y - 1 > 0$ ，只考慮 35 的正因數)

由  $2x - y + 1 = 35$  及  $x + y - 1 = 1$  得  $x = 12$ ， $y = -10$  (不合)

由  $2x - y + 1 = 7$  及  $x + y - 1 = 5$  得  $x = 4$ ， $y = 2$

由  $2x - y + 1 = 5$  及  $x + y - 1 = 7$  得  $x = 4$ ， $y = 4$

由  $2x - y + 1 = 1$  及  $x + y - 1 = 35$  得  $x = 12$ ， $y = 24$

共有三組解  $(4, 2)$ ， $(4, 4)$ ， $(12, 24)$ 。

3. 小華從今年一月一日起每天至少存一元，如果他在連續 45 天內共存了 60 元，試證明他會在連續若干天內的存款總金額恰好是 29 元。

【參考解答】：

令  $a_k$  表示小華從今年 1 月 1 日算起的連續  $k$  天的存款總金額數。

因為小華每天至少存一元，所以

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{45} = 60 \cdots \cdots (1)$$

$$\text{由(1)得 } 30 \leq a_1 + 29 < a_2 + 29 < \cdots < a_{45} + 29 = 89 \cdots \cdots (2)$$

故可知  $a_1, a_2, \cdots, a_{45}, a_1 + 29, a_2 + 29, \cdots, a_{45} + 29$  這 90 個數字，每一個都是 1 到 89 之間的自然數。

但是  $a_1, a_2, \cdots, a_{45}$  這 45 個數字均相異，而  $a_1 + 29, a_2 + 29, \cdots, a_{45} + 29$  這 45 個數字也全相異，由此可知在這 90 個數字中必有兩個數字相等。

故可推知必存在  $i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, 45\}$ ， $i \neq j$ ，使得  $a_i = a_j + 29$ ；

即小華在第  $j+1$ 、 $j+2$ 、 $\cdots$ 、 $i$  天這些連續幾天內的存款總金額恰好是 29 元。