

# 高雄市 97 學年度國民中學數學競賽

## 個人賽試題

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1.  $2009^{2009}$  的個位數為\_\_\_\_\_。Ans:9

2.  $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3967}+\sqrt{3969}} =$ \_\_\_\_\_。Ans:31

3. 一個長方形，如果長減少 5 公分，寬減少 2 公分，那麼面積就減少 66 平方公分，這時剩下的部分恰好成為一個正方形。則原來長方形的面積為\_\_\_\_\_平方公分。  
Ans:130 平方公分

4. 設  $a, b, c$  為三個數，如果  $\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \neq 0$ ，且  $a + b - 2c = 3$ 。則則  $a + b + c =$ \_\_\_\_\_。  
(Ans:15)

5. 一個圓周上有 12 個等分點，任取 3 個等分點作為三角形的頂點，則共可得到銳角三角形 \_\_\_\_\_ 個。Ans: 40

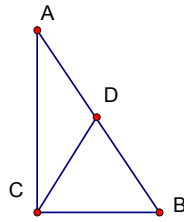
6. 設  $x^2 - 3x + 6 = 0$  的根為  $a$  和  $b$ ，則  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  等於\_\_\_\_\_。

Ans:  $\frac{1}{2}$  (或答無解)

7. 將 1 到 16 的整數填入下列  $4 \times 4$  的方格中，使得每列的和，每行的和，對角線的和都是 34。則這個  $4 \times 4$  的方格中的 4 個頂角格子的數字和  $a + d + m + p =$ \_\_\_\_\_。Ans:34

$a$	$e$	$i$	$m$
$b$	$f$	$j$	$n$
$c$	$g$	$k$	$o$
$d$	$h$	$l$	$p$

8. 如圖，直角三角形  $ABC$  中， $D$  為斜邊上的點，使得  $\triangle ABC$  沿著  $\overline{CD}$  折疊，點  $A$  與點  $B$  正好重合。如果  $\overline{AC} = 4$ ，則  $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(Ans:  $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$ )



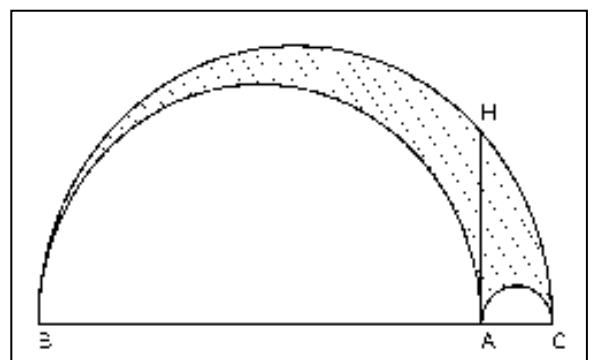
9. 將一堆正整數作如下圖的排列：

1				第 1 列
2	3			第 2 列
4	5	6		第 3 列
7	8	9	10	第 4 列
...				

則第 50 列最後一個數是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。Ans: 1275

10. 已知二個正整數  $A, B$  的最大公因數是  $C$ ，最小公倍數是  $D$ ，其中  $C > 1, C \neq A$ ，且  $C \neq B$ 。如果  $C + D = 187$ ，則  $A + B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(Ans: 119)
11. 有一個三位數  $n$  的數碼是由三個不同的質數組成，且這三個質數都能整除此三位數  $n$ ，則這個三位數  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。Ans: 735

12. 右圖斜線區域的形狀像古希臘做皮鞋的阿爾別隆刀，它是由以  $BC, AB, AC$  為直徑的三個半圓所為成的區域。若  $AH$  垂直  $BC$ ， $H$  是以  $BC$  為直徑的半圓上的點， $AH$  線段長度為 20，則斜線面積 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

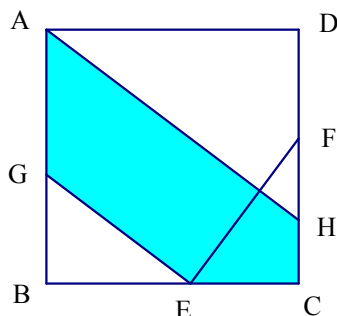


Ans:  $100\pi$

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 邊長為 7 單位的正方形 ABCD，點 E 在 BC 邊上，點 F 在 CD 邊上，線段 CE 長為 3 個單位，線段 CF 長為 4 個單位，線段 AH 與線段 GE 皆與線段 EF 垂直，試求五邊形 AGECH 的面積。



【參考解答】

$$\triangle CME \sim \triangle FCE$$

$$EM/EC = EC/EF = 3/5$$

$$EM/3 = 3/5, EM = 9/5$$

$$\triangle CEF \text{ 全等於 } \triangle BGE \text{ 全等於}$$

$$\triangle DFO$$

$$\triangle BCL \text{ 全等於 } \triangle DAH$$

$$EM = NF = 9/5$$

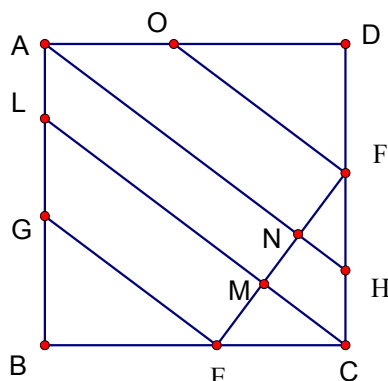
$$MN = 5 - 18/5 = 7/5$$

$$EG = EF = 5$$

$$\triangle BEG \sim \triangle BCL$$

$$BE/BC = EG/CL \quad BE = 7 - 3 = 4, BC = 7, EG = 5, CL = 5 \cdot 7/4 = 35/4$$

$$\text{所求面積} = (EG + CL) \cdot EM/2 + MN \cdot CL = (5 + 35/4) \cdot 9/5 \cdot 1/2 + 7/5 \cdot 35/4 = 495/40 + 245/20 = 985/40 = 197/8$$



另解一

$$1. \text{ 過 } C \text{ 作 } CL \parallel AH, \text{ 則 } \triangle CME \approx \triangle ECF, \text{ 則 } CM = \frac{12}{5}, ME = \frac{9}{5}$$

$$2. \text{ 過 } F \text{ 作 } FO \parallel AH, \text{ 則 } \triangle ODF \cong \triangle EBG, \text{ 則 } EM = NF = \frac{9}{5}, MN = \frac{7}{5}, EN = \frac{12}{5}$$

$$3. EM : MN = GK : KA, \text{ 則 } GL = \frac{9}{4}, LA = \frac{7}{4}, CL = \frac{35}{4}$$

$$4. \text{ 平行四邊形 } GECL \text{ 面積} = \triangle BCF \text{ 面積} - \triangle BEG \text{ 面積} = \frac{99}{8} \text{ -----(1)}$$

$$\text{平行四邊形 } ALCH \text{ 面積} = \frac{35}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{245}{20} \text{ -----(2)}$$

$$\text{五邊形 } AGECH \text{ 面積} = (1) + (2) = \frac{245}{20} = \frac{197}{8}$$

另解二

因為  $\angle AHD = \angle FEC$ ， $\angle DAH = \angle EFC$ 。因此  $\frac{\overline{AD}}{\overline{DH}} = \frac{4}{3}$ ，故  $\overline{DH} = \frac{21}{4}$

因為  $\angle GEB = \angle EFC$ ， $\angle BGE = \angle FEC$ 。因此  $\overline{BG} = 3$

五邊形  $AGECH$  面積  $= 7 \times 7 - 7 \times \frac{21}{4} \times \frac{1}{2} - 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{197}{8}$

2. 設  $N = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ ，其中最後一個數是 100 個 1， $N$  是這 100 個數的和。  
試問  $N$  這一個數是由多少個數字 0，數字 1，數字 2， $\dots$ ，數字 8，數字 9 所組成？

【參考解答】

$N = (9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 9)/9 = [(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + (1000\dots 0-1)]/9$   
 $= (111\dots 1110 - 100)/9 = 111\dots 1010 / 9$  [註: 111...1010 共有 99 個 1]  
 $= 123456790123456790\dots 1234567901234567890$   
共有 10 組 123456790，最後一組是 1234567890  
 $N$  中有 1 個數字是 8，而數字 0，數字 1，數字 2， $\dots$ ，數字 7，數字 9 都有 11 個。

3. 四隻猴子分一堆花生，第一隻猴子將花生平分成四堆，餘一粒將它吃掉，並帶走一堆；  
第二隻猴子將剩餘的花生再平分成四堆，又餘一粒將它吃掉，並帶走一堆；依此下去 $\dots$ ，  
直到第四隻猴子來分剩餘的花生時，剛好也能分四堆又剩一粒；試問這堆花生最少有幾粒。

【參考解答】

設花生有  $N$  粒，此處  $N \in$  自然數

(1) 第一隻猴子拿走  $\frac{N-1}{4}$  粒

(2) 第二隻猴子拿走  $\frac{\frac{N-1}{4} \times 3 - 1}{4} = \frac{3N-7}{16}$

(3) 第三隻猴子拿走  $\frac{\frac{3N-7}{16} \times 3 - 1}{4} = \frac{9N-37}{64}$

(4) 第四隻猴子分剩餘的花生時，剛好也能分四堆又剩一粒

$$\therefore \frac{\frac{9N-37}{64} \times 3 - 1}{4} = \frac{27N-175}{256} \in \text{自然數}$$

$$\therefore 256 \mid 27N - 175$$

設  $27N - 175 = 256K$  此處  $K \in$  自然數

$$\therefore N = \frac{256K + 175}{27} = 9K + 6 + \frac{13(K+1)}{27}$$

$$\therefore K \text{ 最小值為 } 26 (\because 27 \mid 13(K+1))$$

$$\therefore N = 9 \times 26 + 6 + \frac{13(26+1)}{27} = 253$$