

# 高雄市 112 學年度國民中學數學競賽

得 分 欄		填充題	1	2	3

## 個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

性別：男 女

作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $y = |x - a| + |x - 18| + |x - a - 18|$ ，其中  $0 < a < 18$ ，  
若  $a \leq x \leq 18$ ，求  $y$  的最小值為 18

2. 已知正整數  $a, b (a < b)$  為方程式  $x^2 + px + q = 0$  的二根，  
且  $p + q = 196$ ，求  $a^2 + b$  之值為 202

3. 設  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  為 2024 的所有因數，問這  $n$  個數中有  
多少個數其因數個數多於 3 個？(如 12 就有 6 個因數，  
分別為 1, 2, 3, 4, 6, 12)。  
11

4. 張三飼養有公雞、母雞、公鴨、母鴨，已知公鴨與母鴨的總數  
是公雞與母雞總數的三分之一；公雞與公鴨的總數是母雞與母鴨  
的六分之一。今天餵食時，飛來一群麻雀一起進食，此時公雞、  
母雞、公鴨、母鴨及麻雀共有 70 隻，求麻雀所有可能隻數為多少？ 14 或 42

5. 某富翁欲打開其保險箱，卻忘記設定的密碼。只記得當初設定為  
七位數，末三碼為 526，前四碼為連續兩組相同的二位數，即形式  
為  $abab526$ ，且此密碼是 99 的倍數。求此密碼為何數？ 4343526

6. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 不重複的按任意的順序寫成一個九位數，  
若將此數所有相鄰的三個數字所組成的 7 個三位數相加，求此  
7 個三位數和的最小值是多少？ 3122

7. 已知 $a, b, c$ 為正整數，且滿足 $2^a + 4^b + 8^c = 1104$ 。

試求 $a + b + c$ 之的所有可能值為何？

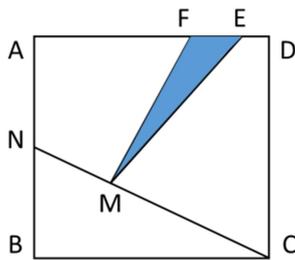
11 或 14

8. 已知 $\triangle ABC$ 的三個邊長度均不相等，而三個邊所對應高的長度分別為5公分、15公分與 $x$ 公分。若 $x$ 為整數，求 $x$ 的可能值有幾個？

3

9. 如圖，一個邊長為10公分的正方形 $ABCD$ ， $AF:FE:ED = 7:2:1$ ， $AN:NB = 1:1$ ， $CM:MN = 3:2$ ，求 $\triangle MEF$ 的面積為多少平方公分

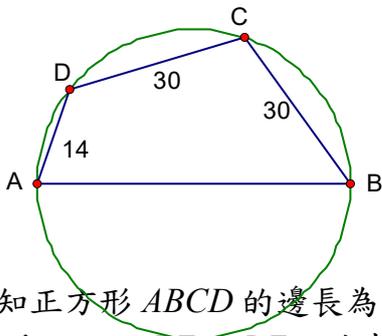
7



10. 圖 及  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、

及  $DA$ ，其中  $BC = CD = 30$  公分， $DA = 14$  公分， $AB$  為此圓的直徑，求直徑  $AB$  的長度為多少公分

50



11. 已知正方形 $ABCD$ 的邊長為5公分，點 $E$ 、 $F$ 分別為 $BC$ 、 $CD$ 邊上的動點，且 $BE = DF$ ，試求 $AF + DE$ 的最小值為多少公分

$5\sqrt{5}$

12. (考慮十進位制) 已知二位數的質數共有21個。若一個四位數 $abcd$ 只看其前兩位數 $ab$ 與只看後兩位數 $cd$ 時皆形成二位數的質數，且這個四位數會被前述兩個質數的平均數整除，試問這樣四位數共有幾個？

29

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 若二次函數寫成  $y = ax^2 + bx + c$  的形式且滿足下列的條件：

- (1) 各係數之和為質數；
- (2)  $y = 0$  的解為兩個相異的正整數；
- (3)  $y = -85$  有正整數解。

試求  $y = 0$  二解中的較大解為多少？

【參考解答】

設  $ax^2 + bx + c = 0$  的兩個解分別為  $\alpha$  和  $\beta$  ( $\alpha > \beta > 0$ )，則

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$$

因為各係數之和  $a - a(\alpha + \beta) + a\alpha\beta = a(\alpha - 1)(\beta - 1)$  為質數。

所以  $a = 1, \beta - 1 = 1$  且  $\alpha - 1$  為質數。因此

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - 2)$$

設  $ax^2 + bx + c = -85$  的正整數解為  $A$

因為  $-85 = -5 \times 17 = (A - \alpha)(A - 2)$  且  $\alpha > 2$ ，故  $A - \alpha < 0$ 。

現在考慮以下 4 種情況：

- (i)  $A - \alpha = -85, A - 2 = 1 \Rightarrow A = 3, \alpha = 88$
- (ii)  $A - \alpha = -17, A - 2 = 5 \Rightarrow A = 7, \alpha = 24$
- (iii)  $A - \alpha = -5, A - 2 = 17 \Rightarrow A = 19, \alpha = 24$
- (iv)  $A - \alpha = -1, A - 2 = 85 \Rightarrow A = 87, \alpha = 88$

因為  $\alpha - 1$  為質數，所以只有(ii)和(iii)符合，故  $\alpha = 24$ 。

2. 高雄市市長杯桌球賽中，每一競賽隊伍與其他隊伍恰好均比賽一場，每場獲勝的隊伍可得 2 分，輸的隊伍得 0 分，如果平手，則各得 1 分。競賽結束後，發現每一隊伍所得的分數中恰好有一半的分數是從六個比賽得分最低的隊伍中得到的(六個得分最低的隊伍，他們所得的分數中一半是從他們彼此比賽中得到的)，求此次參加競賽的隊伍共有幾隊？

【參考解答】設參加競賽的隊伍共有  $n$  隊，故共得  $\frac{n(n-1)}{2} \times 2$  分

得分最低的六隊彼此比賽時共得  $\frac{6(6-1)}{2} \times 2$  分，此為這六隊總得分的一半，故這六隊共得

$\frac{6(6-1)}{2} \times 2 \times 2$ 。其餘  $(n-6)$  隊彼此比賽時共得  $\frac{(n-6)(n-7)}{2} \times 2$  分，此為這  $(n-6)$  隊總得分的一半，故他們共得  $\frac{(n-6)(n-7)}{2} \times 2 \times 2$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 30 + (n-6)(n-7)，則 (n-16)(n-9) = 0。$$

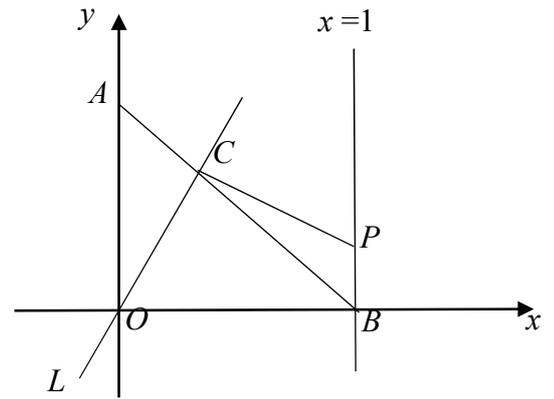
若  $n = 9$ ，則得分最低的六隊共得 60 分，每隊平均得 10 分；較強的三隊共得 12 分，每隊平均得 4 分。(不合理)

故  $n = 16$ ，即得分最低的六隊共得 60 分，每隊平均得 10 分；較強的十隊共得 180 分，每隊平均得 18 分。

3. 如圖所示，點  $A$  在  $y$  軸上，點  $B$  在  $x$  軸上，且  $OA = OB = 1$ ，直線  $L$  經過原點  $O$  並與線段  $AB$  相交於點  $C$ ，過點  $C$  作  $OC$  的垂線，與直線  $x = 1$  相交於點  $P$ 。

(1)(15%) 求證:  $OC = PC$ 。

(2)(5%) 現將直線  $L$  繞  $O$  點旋轉，使交點  $C$  從  $A$  向  $B$  移動，但點  $C$  必須在第一象限內，並記  $AC$  的長為  $t$ 。當  $\triangle AOC$  和  $\triangle BCP$  全等時，求  $t$  的值為何？



[參考解答]

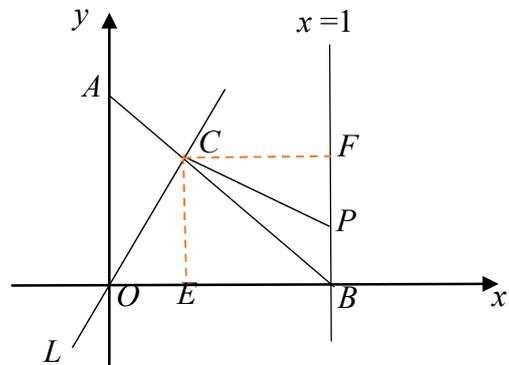
(1) 過點  $C$  作  $CE \perp OB$  於點  $E$ ， $CF \perp BP$  於點  $F$ ，則四邊形  $EBFC$  是矩形。

又因為  $OA = OB$ ，所以  $CE = BE$  (因  $\triangle BCE \sim \triangle BAO$ )，可得四邊形  $EBFC$  是正方形，故  $CE = CF$ 。

在四邊形  $OBPC$  中，已知  $PC \perp OC$ ， $FB \perp OB$ ，  
 $\angle COB + \angle BPC = 180^\circ$ ，

又  $\angle CPF + \angle BPC = 180^\circ$ ，所以  $\angle COB = \angle CPF$ ，  
 即  $\angle COE = \angle CPF$

在直角  $\triangle COE$  和直角  $\triangle CPF$  中， $CE = CF$ ，  
 $\angle COE = \angle CPF$ ，所以  $\triangle COE \cong \triangle CPF$  (AAS)  
 故  $OC = PC$ 。



(2) 因為  $OA = OB = 1$ ，所以  $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $AC = t$ ，則  $CB = \sqrt{2} - t$ 。  
 因為  $\triangle AOC \cong \triangle BCP$ ，所以  $AO = CB$ ，即  $1 = \sqrt{2} - t$ ，所以  $t = \sqrt{2} - 1$ 。