

## 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

|             |  |   |   |   |   |   |
|-------------|--|---|---|---|---|---|
| 得<br>分<br>欄 |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|             |  |   |   |   |   |   |

### 隊際賽試題

編 號\_\_\_\_\_

校 名:\_\_\_\_\_

姓 名:\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 一間寺廟的廣場有依序編號從 1 到 3000 的鐘三千口，3 月 4 日早上主持告訴敲鐘和尚，今天敲鐘的規則為鐘上的號碼若能表示為兩個合數的和則敲鐘一次，否則不敲，例如編號 1 的鐘不敲，而編號 19 ( $= 9 + 10$ ) 的鐘則要敲，若敲鐘和尚從號碼最小到大依序敲鐘，則他敲第 200 次鐘時，該鐘的編號是多少？

#### 【參考解答】

$$n = 2k = 2(k - 2) + 4, k = 1, 2, \dots, 1500$$

$k - 2 \geq 2$ ，即  $n \geq 8$  的偶數均要敲鐘。

$$n = 2k - 1 = 2(k - 5) + 9$$

$k - 5 \geq 2$ ，即  $n \geq 13$  的奇數均要敲鐘。

因此正整數中只有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 這九個數不敲鐘

$$\text{所以 } 200 + 9 = 209$$

# 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

2. 若直角三角形的三邊長都是正整數，且其中一股長為2023，試求滿足上述條件的直角三角形中面積最小值為何？

### 【參考解答】

令三角形的斜邊長為 $a$ ，另一股長為 $b$ 。則

$$a^2 = b^2 + 2023^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 2023^2 \Rightarrow (a + b)(a - b) = 2023^2 = 7^2 \times 17^4$$

所以 $2023^2$ 有 $(2 + 1)(4 + 1) = 15$ 個正因數，因此可知 $(a + b)(a - b)$ 有

$\frac{15-1}{2} = 7$ 種配對方式。在此7種配對方式中求出最小的 $b$ 值後即可算出面積的

最小值。檢查配對可知下面這組配對

$$\begin{cases} a + b = 7^0 \times 17^3 \\ a - b = 7^2 \times 17^1 \end{cases}$$

能求出最小的 $b$ 值即

$$2b = 7^0 \times 17^3 - 7^2 \times 17^1 = 17(17^2 - 7^2) = 4080 \Rightarrow b = 2040$$

故面積的最小值為 $\frac{1}{2} \times 2023 \times 2040 = 2063460$

# 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

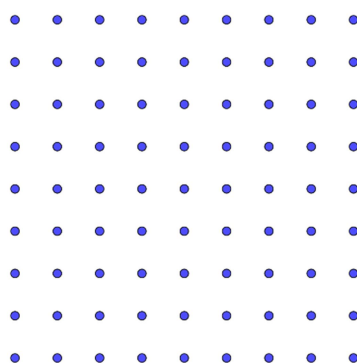
## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

3. 如下圖所示，在  $8 \times 8$  的單位正方形所形成的網格中，共有 81 個格子點。  
考慮以這些格子點為頂點的正方形，則這些正方形共有多少個不同的邊長？



### 【參考解答】

將正方形往左下角移動，使其貼齊X軸與Y軸。

若正方形的底邊與X軸平行，則底邊的兩個頂點可設為 $(0,0)$ 與 $(n,0)$ ，其中  $1 \leq n \leq 8$ 。可得出 1 至 8，共 8 種邊長。

若正方形的底邊不與X軸平行，考慮最下與最左兩個頂點，設為 $(n,0)$ 與 $(0,m)$ ，其中  $1 \leq n \leq 7$  且  $1 \leq m \leq 8 - n$ 。

因 $n$ 與 $m$ 互換後所得的正方形邊長相同，故可假設  $n \leq m$ 。

若  $n = 1$ ，則  $1 \leq m \leq 7$ 。可得出  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{17}$ 、 $\sqrt{26}$ 、 $\sqrt{37}$  與  $\sqrt{50}$ ，共 7 種邊長。

若  $n = 2$ ，則  $2 \leq m \leq 6$ 。可得出  $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{13}$ 、 $\sqrt{20}$ 、 $\sqrt{29}$  與  $\sqrt{40}$ ，共 5 種邊長。

若  $n = 3$ ，則  $3 \leq m \leq 5$ 。可得出  $\sqrt{18}$  與  $\sqrt{34}$ ，共 2 種邊長。其中  $\sqrt{25}$  重複，故不計。

若  $n = 4$ ，則  $m = 4$ 。可得出  $\sqrt{32}$ ，共 1 種邊長。

故總共有 23 種邊長。

# 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

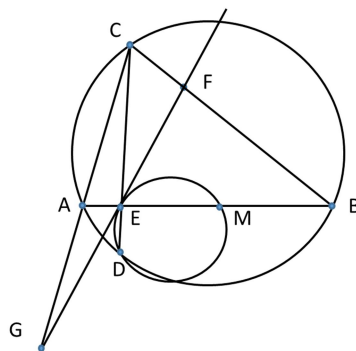
編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

4. 如圖。給定一個圓，兩條弦  $AB$  和  $CD$  相交於  $E$ ，令  $M$  是  $AB$  弦上與  $E$  相異的一點，畫一圓通過  $D, E, M$  三點， $GF$  切線與圓  $DEM$  相切於  $E$  且與  $BC$  直線相交於  $F$  與  $AC$  直線相交於  $G$ 。

已知:  $\frac{AM}{AB} = r$ ，求證:  $\frac{EG}{EF} = \frac{r}{1-r}$



### 【參考解答】

$\triangle CEF$  相似  $\triangle AMD$ ， $\triangle CEG$  相似  $\triangle BMD$

- (1)  $\angle ECF = \angle DAM$ ，

$\because$   $GF$  切線與圓  $DEM$  相切於  $E$

$\therefore \angle MDE = \angle FEB = \angle AEG$

$\angle CEF = 180^\circ - \angle CEA - \angle AEG$

$= 180 - \angle MED - \angle MDE = \angle EMD = \angle AMD$

$\therefore \triangle CEF$  相似  $\triangle AMD$  (AA)， $CE:EF = AM:MD$ ，

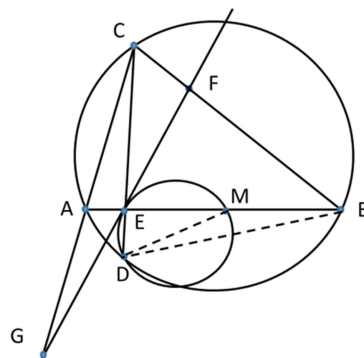
$EF \cdot AM = CE \cdot MD$

- (2)  $\angle GCE = \angle MBD$ ， $\angle CEG = 180 - \angle CEF = 180 - \angle EMD = \angle DMB$

$\therefore \triangle CEG$  相似  $\triangle BMD$  (AA)， $CE:EG = BM:MD$ ， $EG \cdot BM = CE \cdot MD$

- (3)  $EF \cdot AM = CE \cdot MD = EG \cdot BM$

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{r}{1-r}$$



# 高雄市 111 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

5. 設  $x$  及  $y$  為正整數, 若數  $A = x^2 + 3xy + y^2$ , 已知  $A$  的末位數字是 0。

試證:  $A$  的末二位數字一定都是 0 或者  $x$  及  $y$  的末位數字相同。

### 【參考解答】

若  $x, y$  均為奇數或者  $x, y$  為一奇一偶, 則顯然  $A$  亦為奇數。(不合)

若  $x, y$  中兩個均為 10 的倍數, 則顯然  $A$  的末二位數字一定都是 0。

若  $x, y$  中恰只有一個為 10 的倍數, 則顯然  $A$  不是 10 的倍數。(不合)

若  $x, y$  兩個都是不為 10 的倍數的偶數。則  $x^2, y^2$  的尾數只可能是 4 或 6。

若  $x^2, y^2$  的尾數恰為 4 和 6, 由於  $A$  的尾數是 0, 所以  $3xy$  的尾數為 0。(不合)

若  $x^2, y^2$  的尾數同時為 4, 由於  $A$  的尾數是 0, 所以  $3xy$  的尾數為 2, 由此可得  $xy$  的尾數為 4。  $x=y=2$  或  $x=y=8$

若  $x^2, y^2$  的尾數同時為 6, 由於  $A$  的尾數是 0, 所以  $3xy$  的尾數為 8, 由此可得  $xy$  的尾數為 6。

當  $x^2, y^2$  的尾數同時為 6, 則  $x, y$  的尾數只可能是 4 或 6, 但是若  $x, y$  的尾數不同, 則  $x, y$  的尾數不為 6。