

高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 將正整數 a 寫在任意一個正整數的右邊，然後將產生的數加上 a 後得到一個新數，如果 a 為所有新數的因數，則稱 a 為”奇異數”；例如 2 為奇異數，因為將 2 寫在任意一個正整數的右邊，然後將產生的數加上 2 後，新數的個位數字為 4，而 2 一定是所有新數的因數。求在 700 到 3000 之間所有奇異數。

【參考解答】

設 N 任意一個正整數且 a 為三位數或四位數，

則 N 加上奇異數 a 後得到一個新數形式為：

$$Na + a = 1000N + 2a \text{ 或 } 10000N + 2a$$

由於 a 為這個新數的因數，

故 a (三位數)為 1000 的因數或 a (四位數)為 1000 的因數，

所以 a 為 1000，1250，2000，2500；

故在 700 到 3000 之間所有奇異數為 1000，1250，2000，2500 四個數

高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 設 n 為正整數， p 為質數；若方程式 $x^2 + px + np - 1 = 0$ 至少有一個整數解時，求 n 的所有可能的值。

【參考解答】

設方程式有整數根 α ，另一根為 β ；

由根與係數關係可得 $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = np - 1$.

於是得知 β 亦為整數.

假設 $n > 1$ ，注意到 $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = np - 1 - p + 1 = (n - 1)p$.

$\because p$ 為質數， $n - 1 > 0$ ， $\therefore p \mid \alpha + 1$ 或 $p \mid \beta + 1$ ；不妨設 $p \mid \alpha + 1$ ，則

$$\alpha + 1 = \pm mp \cdots \cdots (1), \quad \beta + 1 = \pm \frac{n-1}{m} \cdots \cdots (2),$$

其中 m 為正整數，且 $m \mid (n - 1)$ ；兩式相加，即 (1) + (2) 得

$$\alpha + \beta + 2 = \pm \left(mp + \frac{n-1}{m} \right), \text{ 即 } -p + 2 = \pm \left(mp + \frac{n-1}{m} \right), \cdots \cdots (3)$$

$$\text{若式(3)右邊取正號，則 } (m+1)p + \frac{n-1}{m} = 2 \cdots \cdots (4)$$

顯然，式(4)左邊大於 2，因而造成矛盾.

$$\text{若式(3)右邊取正號，則 } (m-1)p + \frac{n-1}{m} + 2 = 0 \cdots \cdots (5)$$

顯然，式(5)左邊大於 0，因而造成矛盾.

從而假設 $n > 1$ 不成立，但 n 為正整數，故 n 的所有可能的值為 1.

答:1

高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

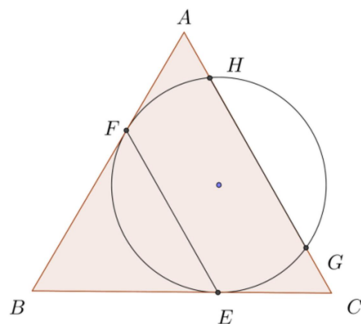
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 正三角形 $\triangle ABC$ 邊長為 3，有一個圓與 $\triangle ABC$ 相切於 E 、 F 兩點，並與邊 AC 交於 G 、 H 兩點，如下圖。若線段 \overline{EF} 與 \overline{GH} 等長，求 \overline{EF} 之長度。



【參考解答】

如右圖，設圓心為 D ，因為圓與 $\triangle ABC$ 相切，線 BD 為 $\angle ABC$ 的角平分線，線 BD 交 \overline{EF} 與 \overline{GH} 於點 I 及 J 。

因為 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分線， $\angle FBI = 30^\circ$ 、

$\angle BIF = 90^\circ$ 、 $\angle BJH = 90^\circ$ ，且 $|\overline{FI}| = \frac{1}{2}|\overline{EF}|$ 及

$|\overline{HJ}| = \frac{1}{2}|\overline{GH}|$ ，而 $|\overline{EF}| = |\overline{GH}|$ ，所以 $|\overline{FI}| = |\overline{HJ}|$ ，因

此 $\triangle FID \cong \triangle HDJ$ ；

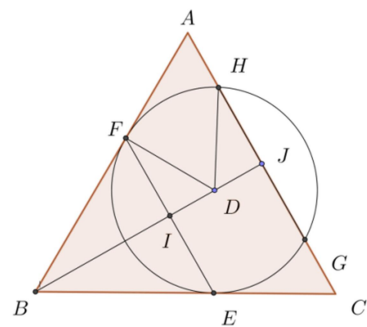
因為圓與 $\triangle ABC$ 相切於 F 點， $\angle BFD = 90^\circ$ ， $\triangle FBI \approx \triangle DFI$ ，所以 $\angle IFD = 30^\circ$ 、 $\angle JHD = 30^\circ$ 。

令 $x = |\overline{HJ}| = |\overline{FI}|$ ，則 $|\overline{DJ}| = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 、 $|\overline{DI}| = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 、 $|\overline{BI}| = \sqrt{3}x$ ；因為 $|\overline{AB}| = 3$ ，所

以 $|\overline{BJ}| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$$|\overline{BJ}| = |\overline{DJ}| + |\overline{DI}| + |\overline{BI}|$$

所以 $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}x = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $x = \frac{9}{10}$ ， $\overline{EF} = 2x = \frac{9}{5}$ 。



高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 設 a_1, a_2, a_3, a_4 皆為正整數且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ，令集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 及集合 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ ，若集合 A 和集合 B 有兩個共同元素 a_1, a_4 ，即 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 且 $a_1 + a_4 = 17$ ，試問滿足此條件的集合 A 共有多少個？

【參考解答】

因 $a_1 + a_4 = 17$ ，且 a_1, a_4 均為正整數之平方，故 $a_1 = 1$ 且 $a_4 = 16$ 。

若 $a_2^2 = a_4 = 16$ ，則 $a_2 = 4$ ，且 $5 \leq a_3 \leq 15$ ，

共 11 種可能。

若 $a_3^2 = a_4 = 16$ ，則 $a_3 = 4$ ，且 $2 \leq a_2 \leq 3$ ，

但若 $a_2 = 2$ ，則 $A \cap B = \{1, 4, 16\}$ ，不合，

共 1 種可能。

故滿足條件的集合 A 共有 12 個。

答:12 個

高雄市 107 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

- 5 連接圓周上 9 個不同點的 36 條直線段分別塗上紅色或藍色，假設 9 點中每三點所確定的三角形都至少含有一條紅色邊，證明存在有四點，使其中每兩點的連線都是紅色。

【參考解答】

設 9 點為 A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$)。則存在一點，使得從這點出發的 8 條線段中塗上紅色的不是 5 條（因 $\frac{1}{2} \times 5 \times 9$ 不是整數）。不妨設此點為 A_0 。

- (1) 若從 A_0 出發的 8 條線段中有 6 條或 6 條以上的線段為紅色，不妨設為 A_0A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)。則 6 個點 A_1, A_2, \dots, A_6 ，用兩種顏色去塗任意兩點連線，必有同色三角形， $\Delta A_iA_jA_k$ ($1 \leq i < j < k \leq 6$)，由題意知它只能是紅色的，此時 A_0, A_i, A_j, A_k 四點中每兩點的連線都是紅色；
- (2) 若從 A_0 出發的 8 條線段中只有 4 條或 4 條以下的線段為紅色，則至少有 4 條為藍色，不妨設為 A_0A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 為藍色。依題意， A_1, A_2, A_3, A_4 每兩點間的連線都是紅色。