

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽  
個人賽試題

\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $M = 123^{456} + 456^{123}$ ，則  $M$  的個位數為\_\_\_\_\_。

ANS: 7

2. 若  $p, q$  為整數，且滿足  $\frac{127}{p} - \frac{18}{q} = 1$ 。則  $q$  的最大值為\_\_\_\_\_。

ANS: 2268

3. 設  $a, b$  均為整數且滿足  $a + b = 84 - 3ab$ ，令  $a + b$  所有可能值之和為  $S$ ，則  $S =$  \_\_\_\_\_。

ANS: 72

4. 已知數列  $\{5, 8, 11, \dots, 197, 200\}$  為等差數列，若從此數列中任意選出  $n$  個不同的數，而該  $n$  個不同數中一定會存在某 6 個數  $a, b, c, d, e, f$  使得  $a + b = c + d = e + f = 208$ ，則  $n$  之最小值為\_\_\_\_\_。

ANS: 37

5. 已知  $x + y = 5$ ， $xy = 2$ ， $a + b = 3$ ， $ab = -1$ ，若  $m = ax + by$ ， $n = bx + ay$ 。則  $m^2 + n^2$  的值為\_\_\_\_\_。

ANS: 223

6. 已知  $\triangle ABC$  中， $AC = 7$ ， $D$  為  $AB$  上一點且  $AD = BD = CD = 5$ ，則  $BC =$  \_\_\_\_\_。

ANS:  $\sqrt{51}$

7. 設  $\triangle ABC$  三個邊的邊長均為整數， $M$  為  $AB$  邊的中點，令  $p = AC + AM$ 、 $q = BC + BM$ ，若  $AB = AC$ ，且  $p : q = 5 : 2$ ，則  $\triangle ABC$  的面積最小值為\_\_\_\_\_。

ANS:  $\frac{\sqrt{399}}{4}$

8. 已知四邊形  $ABCD$  中， $BC \parallel AD$ ， $CA$  平分  $\angle BCD$ ， $E$  為兩條對角線的交點；若  $CD = AE, BC = DE$ ，則  $\angle ABC =$  \_\_\_\_\_。

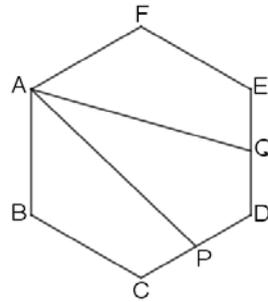
ANS:  $126^\circ$

9. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $AD$  為  $\angle BAC$  的平分線， $AB = 10, AC = 12, AD = 8$ ， $E$  為  $AC$  上一點且  $AE = 2$ ，若  $M, N$  分別為  $AE, BC$  的中點；則  $MN =$  \_\_\_\_\_。

ANS:  $\frac{22}{3}$

10. 已知正六邊形  $ABCDEF$  的邊長為 2，若  $P, Q$  分別為  $CD, DE$  兩邊的中點，則四邊形  $APDQ$  的面積為 \_\_\_\_\_。

ANS:  $2\sqrt{3}$



11. 已知有 12 人參加象棋循環賽(賽制為任意兩人都必須比賽一次)，規定勝一局得 2 分，平手一局得 1 分，輸者不得分。若比賽結果是第二名的得分與最後 5 名的得分之和相同，則第二名得分為 \_\_\_\_\_。

ANS: 20

12. 設  $a, b, c$  為正整數，且  $a + b + c = 24$ ；若以  $a, b, c$  當成三角形的三邊長，共可得到  $n$  種不全等的三角形，則  $n =$  \_\_\_\_\_。

ANS: 12

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 $N$ 為一個整數。若 $N$ 加上 32 為一個整數的平方，而 $N$ 加上 100 則為另一個整數的平方。試求 $N$ 的所有可能值。

【參考解答】

可設 $N + 32 = x^2$ ， $N + 100 = y^2$ ，其中 $x$ 與 $y$ 皆為正整數。

故 $y^2 - x^2 = 68 = (y - x)(y + x) = 2^2 \times 17$ 。

因 $y - x$ 與 $y + x$ 為同奇或同偶，

故 $y - x$ 與 $y + x$ 皆為偶數。

可得 $y - x = 2$ 與 $y + x = 34$ 。

故 $y = 18$ 與 $x = 16$ 。

可解得 $N = 16^2 - 32 = 224$ 。

2. 設 $a$ 為有理數，若 $(a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 的所有根均是整數，試求 $a$ 的所有可能值。

【參考解答】： $a = 1$ ，則 $x = 1$ 。

$a \neq 1$ ，設 $x_1, x_2$ 為方程式之二根

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a-1} = -1 - \frac{1}{a-1}$$

$$x_1 x_2 = \frac{2a-3}{a-1} = 2 - \frac{1}{a-1}$$

$$x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 3, (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 4; \quad a = 1 - \frac{1}{1 + x_1 + x_2}$$

(i)  $x_1 - 1 = 1, x_2 - 1 = 4; x_1 = 2, x_2 = 5$

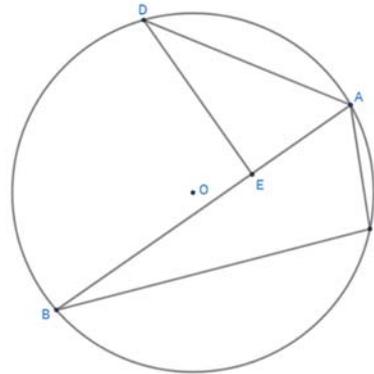
(ii)  $x_1 - 1 = -1, x_2 - 1 = -4; x_1 = 0, x_2 = -3$

(iii)  $x_1 - 1 = 2, x_2 - 1 = 2; x_1 = 3 = x_2$

(iv)  $x_1 - 1 = -2, x_2 - 1 = -2; x_1 = -1 = x_2$

$$a = \frac{7}{8}, a = \frac{3}{2}, a = \frac{6}{7}, a = 2 \text{ 及 } a = 1$$

3. 如下圖，已知圓  $O$  是  $\triangle ABC$  的外接圓， $AB > AC$ ， $\angle BAC$  的外角平分線交圓  $O$  於  $D$  點，  
 $E$  是  $AB$  上之點使得  $AE < BE$  且  $DE \perp AB$ 。若  $AE = a$ ， $BE = b$  且  $\angle BAC = 60^\circ$ ，試以  
 $a$  與  $b$  表示  $\triangle ABC$  的面積。



【參考解答】：

在  $\overline{BE}$  上取一點  $F$  使得  $\overline{EF} = \overline{AE} = a$

做射線  $\overrightarrow{DF}$  交圓  $O$  於  $G$  點

因為  $\overline{DE} \perp \overline{AB}$  且  $\overline{EF} = \overline{AE}$

所以  $\triangle ADF$  是等腰三角形

$\therefore \overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的外角平分線

$\therefore \angle ADF = 180^\circ - 2\angle DAF = \angle BAC$

故 弧  $AG =$  弧  $BC$

$\Rightarrow$  弧  $AC =$  弧  $BG$

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BG} \dots\dots(1)$

又由  $\angle BGD = \angle BAD = \angle AFD = \angle BFG$

可得  $\overline{BG} = \overline{BF} \dots\dots(2)$

故由(1)和(2)知  $\overline{AC} = \overline{BG} = \overline{BF} = b - a$

$\therefore \triangle ABC$  中  $\overline{AB}$  邊上之高  $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} (b - a)$

$\therefore \triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \overline{AB} \times h = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 - a^2)$  ■

