

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 設 m 為一正數且使得方程式 $2018x^2 + mx + 8102 = 0$ 和 $8102x^2 + mx + 2018 = 0$ 有一個公共根，試求 m 之值。

【參考解答】：

設 x 為兩方程式的公共根，

$$\text{則有 } 2018x^2 + mx + 8102 = 0 \cdots \cdots (1)$$

$$8102x^2 + mx + 2018 = 0 \cdots \cdots (2)$$

$$(2)-(1) \quad (8102-2018) x^2 - (8102-2018)=0$$

化簡並解得 $x=1$ 或 -1 ;

$$x=-1 \text{ 代入(1)式得 } m = 10120,$$

而以 $x=1$ 代入(1)式得 $m = -10120$ (不合).

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

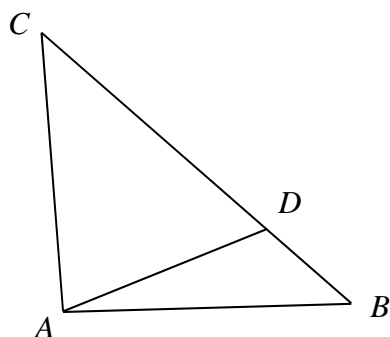
編號_____

校名:_____

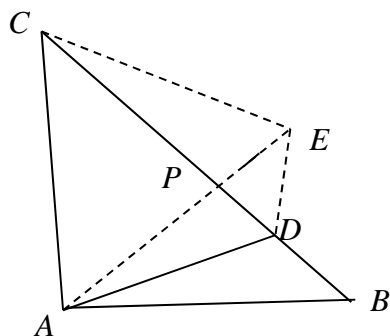
姓名:_____,_____,_____,_____

2. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = CD$ 且 $2\angle BAD + 3\angle ABD = 180^\circ$ 。

求證 $\angle CAD = \angle BAD + \angle ABD$



【參考解答】



在 BC 上取一點 P ，連接 AP 至點 E ，使得 $\angle BAD = \angle DAE$ 且 $AB = AE$

連接 DE 及 $CE \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle AED$ 得 $BD = DE$

$$\angle CDE + \angle ADC = \angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD)$$

$$\angle CDE = 2\angle BAD + 3\angle ABD - (\angle BAD + \angle ABD) - \angle ADC = \angle ABD$$

因為 $\triangle ABD \cong \triangle AED$ ，所以 $\angle AED (= \angle PED) = \angle ABD = \angle CDE (= \angle EDP)$

$EP = DP$ 又 $CD = AE$ ，所以 $AP = CP$ ， $\angle ACP = \angle CAP$

$\angle CPE = 2\angle CAP$ 又因為 $\angle CPE = 2\angle PED$

$$\angle CAD = \angle DAE + \angle CAE = \angle BAD + \angle AED = \angle BAD + \angle ABD$$

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 有一個八位數，它的前五位數字組成的五位數與後三位數字組成的三位數的和等於 30296，而它的前三位數字組成的三位數與後五位數字組成的五位數的和等於 50546，試求該八位數。

【參考解答】：

設前三位數字組成的三位數為 x ，

第四、五位數字組成的二位數為 y ，

而後三位數字組成的三位數為 z 。

可知 $100x + y + z = 30296$ ， $x + 1000y + z = 50546$ 。

故 $999y - 99x = 20250$ ，即 $111y - 11x = 2250$ 。

可得 $y - 50 = 11x + 2200 - 110y$ ，

故 $y - 50$ 是 11 的倍數，所以 y 的可能值為 50, 61, 72, 83, 94。

分別代入 $111y - 11x = 2250$ 後，

僅 $y = 50$ 時所得出的 $x = 300$ 能滿足 $100x + y + z = 30296$ 。

故可解得 $z = 246$ 。

。

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 設數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 > 0$ ，若此數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}$ ，其中 n 是正整數，

試求 $a_{2017}S_{2016} + a_{2017}S_{2017} + a_{2018}S_{2017} + a_{2018}S_{2018}$ 之值。

【參考解答】：

$$\text{因為 } a_1 > 0 \text{ 且 } a_1 = S_1 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$$

解之可求得 $a_1 = 1$

對任意 $n \geq 2$ 的自然數，

$$\text{因為 } S_n = \frac{1}{2} (S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}})$$

$$\text{所以 } 2S_n(S_n - S_{n-1}) - (S_n - S_{n-1})^2 = 1$$

$$\text{化簡上式可得 } S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$$

因為 $S_1 = a_1 = 1$ 且

$$S_n^2 - S_1^2 = (S_n^2 - S_{n-1}^2) + (S_{n-1}^2 - S_{n-2}^2) + (S_{n-2}^2 - S_{n-3}^2) + \dots + (S_2^2 - S_1^2) = n - 1$$

$$\text{所以 } S_n^2 = n$$

$$\Rightarrow 1 = S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n) = a_{n+1}(S_{n+1} + S_n), \text{ 其中 } n \text{ 是自然數}$$

$$\text{故 } a_{2017}S_{2016} + a_{2017}S_{2017} + a_{2018}S_{2017} + a_{2018}S_{2018}$$

$$= a_{2017}(S_{2017} + S_{2016}) + a_{2018}(S_{2018} + S_{2017})$$

$$= 2$$

高雄市 106 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 對任意給的 30 個相異的正整數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 。試證：其中一定存在四個正整數 a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 當中某四個數)，僅用減號、乘號和括號將它們適當組合成為一個算式，其結果是 187 的倍數。

【參考解答】：

「任意給定 $n+1$ 個正整數中，總有 2 個正整數之差能被 n 整除」

以 n 為除數，可將正整數分為餘數為 0，餘數為 1，餘數為 2， \dots ，餘數為 $n-1$ 的 n 個抽屜，因此，任意給定 $n+1$ 個正整數，總有 2 個正整數對 n 同餘，於是這 2 個正整數之差能被 n 整數。

$187 = 11 \times 17$ ，先從 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 挑出 12 個正整數，假定為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ ，此 12 個正整數當中必存在 2 個正整數之差為 11 的倍數，令 $11|(a_2 - a_1)$ ；又從 $a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots, a_{30}$ 餘下的 18 個正整數當中必存在 2 個正整數之差為 17 的倍數，令 $17|(a_{14} - a_{13})$ 。

所以 $187|(a_2 - a_1)(a_{14} - a_{13})$ ，故得證。

或

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 中至少有兩個數除以 11 餘數相同，不失其一般性，設它們是 a_1, a_2 ，令 $11|(a_2 - a_1)$ 。而 a_3, \dots, a_{30} 這 28 個正整數中至少有兩個數除以 17 餘數相同，設它們是 a_{14}, a_{13} ，令 $17|(a_{14} - a_{13})$ 。故 $187|(a_2 - a_1)(a_{14} - a_{13})$