

高雄市 105 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 設 m, n 為正整數且 $m > n$ ，已知 $m + n = 2468$ 這個式子的計算過程並無進位，求滿足此式之 (m, n) 序對共有多少種？

【參考解答】8: $0 + 8, 1 + 7, \dots, 8 + 0$ 共 9 種

6: $0 + 5, 1 + 4, \dots, 6 + 0$ 共 7 種

4: $0 + 4, 1 + 3, \dots, 4 + 0$ 共 5 種

2: $0 + 2, 1 + 1, 2 + 0$ 共 3 種

$$(9 \times 7 \times 5 \times 3 - 1)/2 = 472$$

$$472 - 1 = 471$$

高雄市 105 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

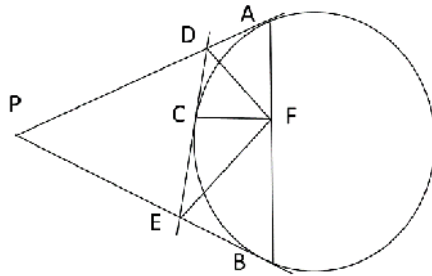
編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 如下圖， PA, PB 切圓 O 於 A, B 兩點， DE 切圓 O 於 C 點交 PA ，

PB 於 D, E 兩點， CF 垂直 AB 於 F 點，求證： $\angle CFD = \angle CFE$ 。



【參考證明】：

如圖：作 $DM \perp BC$ ， $EN \perp BC$ 交 BC 於 M, N

兩點。考慮 $\triangle ADM$ ， $\triangle BEN$ ，因為 PA ，

PB 為切線，所以 $PA = PB$ ， $\angle DAM = \angle EBN$ ，

又 $DM \perp BC$ ， $EN \perp BC$ ，

所以 $\triangle ADM$ 相似 $\triangle BEN$ ， $DM : EN = DA : EB$ 。

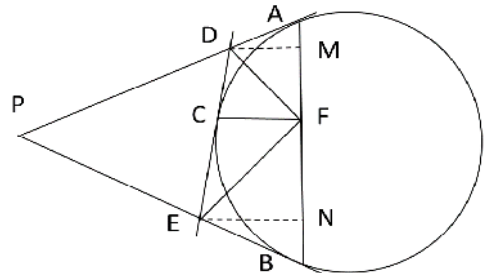
因為 A, B, C 為切點，所以 $AD = DC$ ， $BE = EC$ ，所以 $DA : EB = DC : EC$ 。

又 $DM \perp BC$ ， $EN \perp BC$ ，所以 DM 平行 CF 平行 EN ，

所以 $DC : EC = MF : FN$ ，所以 $DM : EN = MF : FN$ ，又 $\angle DMF = \angle ENF = 90^\circ$

所以 $\triangle FDM$ 相似 $\triangle FEN$ ， $\angle DFM = \angle ENF$ 。

又因為 $\angle CFD + \angle DFM = \angle CFE + \angle ENF = 90^\circ$ ，所以 $\angle CFD = \angle CFE$ 。



高雄市 105 學年度國民中學數學競賽

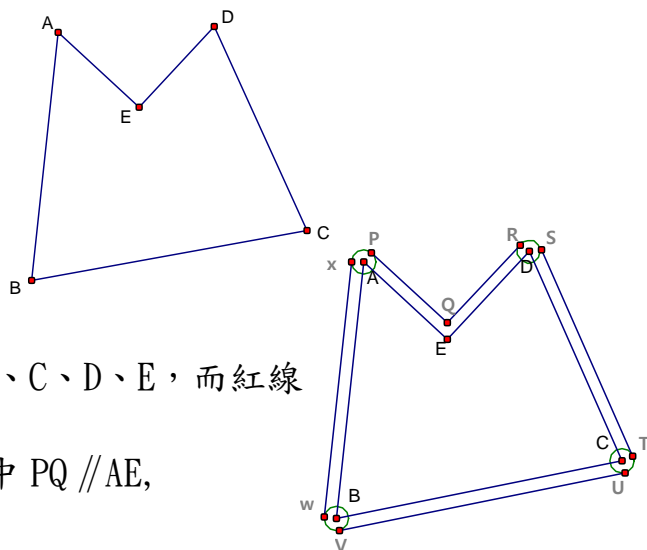
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 農場有一座荷花池，它的邊緣圍成五邊形 $ABCDE$ 的形狀，如圖所示。其中 $AB=45$ 公尺， $BC=50$ 公尺， $CD=40$ 公尺， $DE=20$ 公尺， $EA=20$ 公尺，且 $\angle AED=90^\circ$ 。農場主人為維護安全，打算沿著荷花池邊最近的距離保持為 2 公尺的地面上畫上一條紅線，問此紅線繞一圈後回到原出發點共有了多少公尺？



【參考解答】五邊形的頂點為 $A、B、C、D、E$ ，而紅線

圍成的形狀為 $PQRSTU VWX$ ，其中 $PQ \parallel AE$ ，

$QR \parallel ED, ST \parallel DC, UV \parallel CB, WX \parallel BA$ ；

$AP \perp AE, RD \perp DE, SD \perp DC, TC \perp CD, UC \perp CB, VB \perp BC,$

$WB \perp BA, XA \perp AB$. 又 XP, RS, TU, VW , 是半徑為 2 的圓的弧

且有 $\angle XAP + \angle RDS + \angle VCU + \angle VBW = 450$

紅線繞一圈長度為 $18+18+40+50+45+5\pi=171+5\pi$

高雄市 105 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 已知 $a^4 + 3a^2 = b^2 - 3b = 1$ 且 $a^2b \neq 1$ ，試求 $\frac{a^6b^3+1}{b^3}$ 的值。

【參考解答】

$$a^4 + 3a^2 = b^2 - 3b = 1$$

$$b^2 - 3b - 1 = 0 \text{ 知 } b \neq 0, \text{ 除以 } -b^2 \text{ 得 } \frac{1}{b^2} + \frac{3}{b} - 1 = 0$$

$$a^2b \neq 1 \Rightarrow a^2 \neq \frac{1}{b}, \text{ 且 } a^4 + 3a^2 - 1 = (a^2)^2 + 3(a^2) - 1 = 0$$

$a^2, \frac{1}{b}$ 為方程式 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的兩相異實根

由根與係數關係知， $a^2 + \frac{1}{b} = -3$ ， $\frac{a^2}{b} = -1$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{a^6b^3+1}{b^3} &= a^6 + \frac{1}{b^3} = \left(a^2 + \frac{1}{b}\right)\left(a^4 - \frac{a^2}{b} + \frac{1}{b^2}\right) \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{b}\right)\left[\left(a^2 + \frac{1}{b}\right)^2 - 3\frac{a^2}{b}\right] \\ &= (-3)[(-3)^2 - 3(-1)] \\ &= \underline{-36} \end{aligned}$$

高雄市 105 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

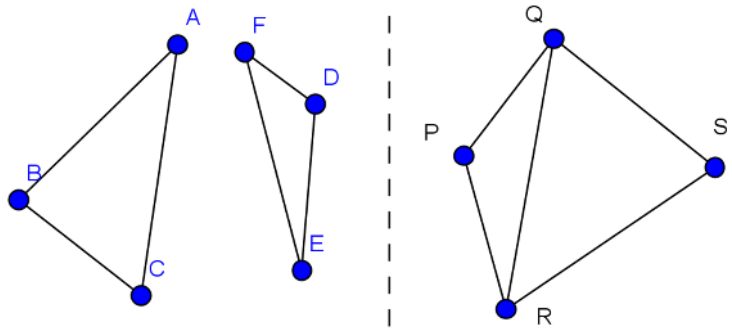
5. 將一個正十一邊形，任取八條對角線，使得任兩條對角線在此正

十一邊形內(不含頂點)不相交，可將此正十一邊形分為九個三角形。

試證明無論這些對角線怎麼選取，這九個三角形之中都恰有一個銳

角三角形。

【參考解答】



考慮左圖，若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形。任取一個三角形 $\triangle DEF$ ，假設 $\triangle DEF$ 出現在 AC 的另一側(EF 可與 AC 重合)。因 $ABCD$ 為圓內接四邊形，可知 $\angle FDE + \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$ ，故 $\triangle DEF$ 為鈍角三角形。故至多只有一個銳角三角形。

考慮右圖，若 $\triangle PQR$ 為鈍角三角形，且 $\angle QPR$ 為鈍角，則 QR 為對角線。可設包含 QR 的另一個三角形為 $\triangle QRS$ 。因 $PQSR$ 為圓內接四邊形，可知 $\angle QSR = 180^\circ - \angle QPR$ 為銳角。

若 $\angle SQR$ 與 $\angle QRS$ 皆為銳角，則 $\triangle QRS$ 即為所求。

若 $\angle SQR$ 或 $\angle QRS$ 為鈍角，則 SR 或 QS 為對角線。重複上述步驟，必可找到一個銳角三角形。

故這九個三角形之中恰有一個銳角三角形。