

# 高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

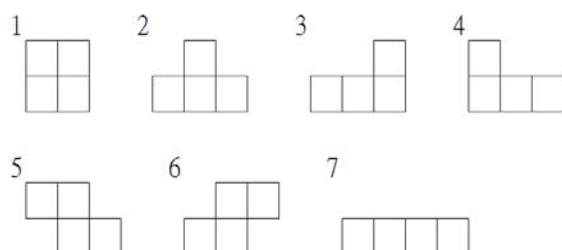
校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_

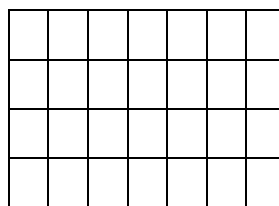
作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 四方格共有下面 7 種圖形，每一種都由 4 個面積為 1 的小方格組成：



若利用上面所提供的 7 個四方格(可以重複使用某種圖形)拼成一個  $7 \times 4$  的長方形，那麼，最多可以使用上面 7 種圖形中的幾種？請畫圖舉例說明並證明你們的論點。



### 【參考解答】

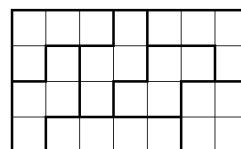
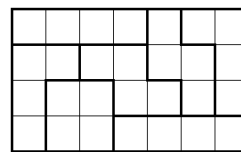
首先證明不能用 7 種圖形構成  $7 \times 4$  的長方形。

將長方形的 28 個小方格塗成黑白相間的棋盤格；  
若能用 7 種圖形拼成長方形，則第 2 種圖形必佔據 3 個黑格 1 個白格或 3 個白格 1 個黑格，  
而其餘圖形皆佔據 2 個黑格 2 個白格，  
因此長方形不能用 7 種圖形拼成。

舉例說明：

使用上面 7 種圖形中最多 6 種拼成一個  $7 \times 4$  的長方形

如右上圖：使用圖 1, 3, 4, 5, 6 共 6 種拼成長方形，其中圖 7 用兩個。



如右下圖：使用圖 1, 3, 4, 5, 6 共 6 種拼成長方形，其中圖 5 用兩個。

# 高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_

2. 已知數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_2 = 6$  且  $1 + a_{n+1}^2 = 2a_{n+2}$ , 其中  $n$  為正整數。

若定義一個新數列  $\{b_n\}$  滿足  $b_n = \frac{1}{1+a_n}$ , 其中  $n$  為正整數且令  $S_n$  表示

數列  $\{b_n\}$  的前  $n$  項之和。試求  $S_{2015} + \frac{a_{2016}}{a_{2016} - 1}$  之值。

【參考解答】：由假設可知對任意的自然數  $n$ ,  $a_{n+2} - 1 = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{2}$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+2} - 1} &= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+1} + 1} \\ \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} + 1} &= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} S_{2015} + \frac{a_{2016}}{a_{2016} - 1} &= \left( \sum_{k=1}^{2015} b_k \right) + \frac{a_{2016}}{a_{2016} - 1} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{2015} \frac{1}{1+a_k} \right) + \frac{a_{2016}}{a_{2016} - 1} \\ &= \frac{1}{a_1 + 1} + \left[ \sum_{k=2}^{2015} \left( \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} \right) \right] + \frac{1}{a_{2016} - 1} + 1 \\ &= \frac{3}{5} + \left( \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{2016} - 1} \right) + \frac{1}{a_{2016} - 1} + 1 \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + 1 = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

# 高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

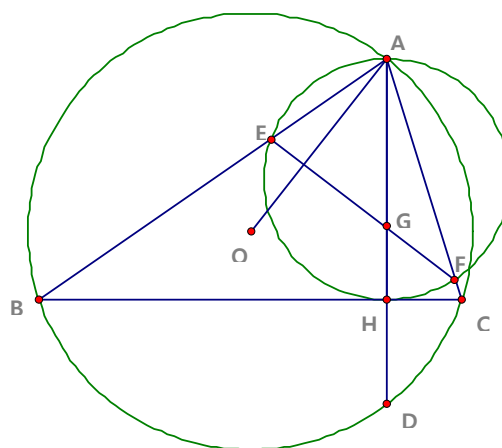
## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_

3. 如下圖，已知  $AH$  是  $\triangle ABC$  中  $BC$  邊上的高，延長  $AH$  交  $\triangle ABC$  的外接圓  $O$  於  $D$ ，以  $AH$  為直徑作圓分別交  $AB$ 、 $AC$  於  $E$ 、 $F$ ，連接  $EF$  交  $AD$  於  $G$ 。請猜想  $AO$  與  $EF$  交角是多少度？並證明你們的答案。



【參考解答】：

- (1) 根據圖形合理猜想  $AO \perp EF$ ，猜想  $AO$  與  $EF$  交成 90 度的角。

(2) 證明：

過  $A$  點作直線  $AT$  與外接圓  $O$  相切。

由於  $\triangle AHB \sim \triangle AEH$ ， $\therefore \angle B = \angle AHE$ ，且  $\angle AHE = \angle AFE \Rightarrow$

$$\angle B = \angle AFE \Rightarrow \angle C = \angle AEF$$

$\because$  直線  $AT$  與外接圓  $O$  相切於  $A$

$$\therefore \angle C + \angle BAT = \pi \Rightarrow \angle AEF + \angle BAT = \pi \Rightarrow$$

$$AT \parallel EF \Rightarrow AO \perp EF。$$

# 高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_

4. 若  $x_1, x_2$  為一元二次方程式  $(a^2 + 3a + 2)x^2 - 2ax - a^2 + 3a - 2 = 0$  的

兩個整數根並滿足  $x_1 < 0, 0 < x_2$ ，試求  $a$  之值。

【參考解答】：方程式化為  $(a+1)(a+2)x^2 - 2a - (a-2)(a-1) = 0$

其中  $a \neq -1, -2$

$$[(a+1)x - (a-1)][(a+2)x + (a-2)] = 0$$

$$x_1 = \frac{a-1}{a+1}, \quad -\frac{2}{x_1-1} = a+1$$

$$x_2 = \frac{2-a}{a+2}, \quad \frac{4}{x_2+1} = a+2$$

$$\frac{4}{x_2+1} + \frac{2}{x_1-1} = 1$$

$$(x_1-3)(x_2-3) = 8$$

$$x_1-3 = \pm 1, \quad x_2-3 = \pm 8$$

$$x_1-3 = \pm 2, \quad x_2-3 = \pm 4$$

而得  $(x_1, x_2) = (2, -5), \text{或 } (-5, 2), \text{或 } (-1, 1),$

但  $(1, -1)$  (不合理),

故  $a = -3, -2/3, 0$

高雄市 104 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

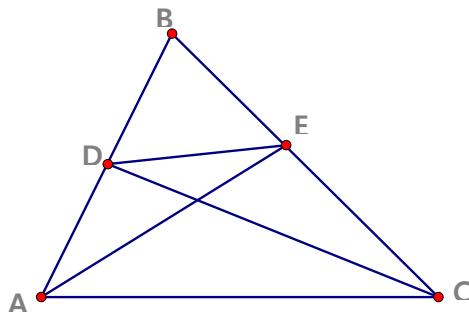
編號\_\_\_\_\_

校名:\_\_\_\_\_

姓名:\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_

5. 如下圖，設  $AE$  和  $CD$  分別為  $\triangle ABC$  的  $\angle A$  和  $\angle C$  的平分線，

若  $\angle BDE : \angle EDC = \angle BED : \angle DEA$ 。求證： $\triangle ABC$  為等腰三角形。



【參考解答】：令  $AE$  與  $CD$  交於  $O$  點，連接  $DE$ ，作直線  $MD$  與  $NE$ ，使得  $MD$  與  $DC$  關於直線  $DE$  對稱， $NE$  與  $EA$  關於直線  $DE$  對稱，直線  $MD$  交  $BC$  於  $M$  點，直線  $NE$  交  $AB$  於  $N$  點， $NE$  與  $MD$  交於  $P$  點，詳如右圖。

因為  $AE$  和  $CD$  是三角形  $ABC$  的角平分線，

所以  $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

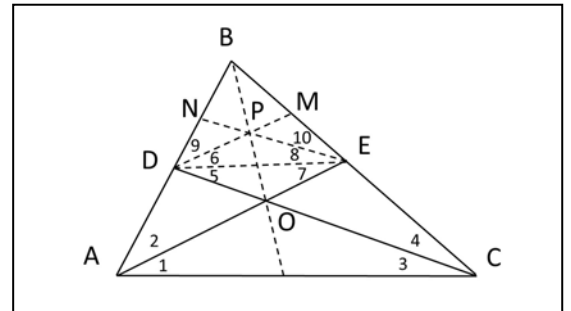
因為對稱，所以  $\angle 5 = \angle 6$ ， $\angle 7 = \angle 8$ ， $PO \perp DE$ 。

設  $\angle BDE : \angle EDC = \angle BED : \angle DEA = k$ ， $(\angle 9 + \angle 6) : \angle 5 = (\angle 10 + \angle 8) : \angle 7 = k$ 。

觀察

$$\begin{aligned}\angle AEB + \angle CDB &= (180^\circ - \angle ABC - \angle 2) + (180^\circ - \angle ABC - \angle 4) \\ &= 360^\circ - 2\angle ABC - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) \\ &= 270^\circ - 2\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{3}{2}(180^\circ - \angle ABC)\end{aligned}$$

所以



$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} &= \frac{\angle 7 + \angle 8 + \angle 10 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 9}{\angle 8 + \angle 10 + \angle 9 + \angle 6} \\
&= \frac{(1+k)\angle 7 + (1+k)\angle 5}{k\angle 7 + k\angle 5} \\
&= \frac{1+k}{k}
\end{aligned}$$

推得  $k=2$  。

$$\angle 9 + \angle 6 = 2\angle 5, \angle 10 + \angle 8 = 2\angle 7,$$

$$\angle 6 = \angle 5 (\text{對稱}), \angle 7 = \angle 8 (\text{對稱}), \text{所以}, \angle 9 = \angle 6, \angle 10 = \angle 8,$$

DM 與 EN 為三角形 BDE 的內角平分線，P 為三角形 BDE 內心，

BP 平分  $\angle DBE$ ，直線 BP 通過 O 點 (O 為三角形 BAC 內心)

又  $PO \perp DE$  (對稱)，

所以，三角形 BDE 為等腰三角形 (高與內角分角線重合)。

觀察三角形 BDC 與三角形 BEA，

$$\begin{aligned}
\angle ABE &= 180^\circ - (\angle 7 + \angle 8 + \angle 10) - \angle 2 \\
&= 180^\circ - (\angle 5 + \angle 6 + \angle 9) - \angle 4 \\
&= \angle CBD
\end{aligned}$$

所以， $\angle 2 = \angle 4$ ， $\angle BAC = \angle BCA$ ，三角形 ABC 為等腰三角形。