

高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 給定一個任意三角形 ABC 。請問是否可以將這三角形分成三個部分，再由這三個部分拼成一個長方形？若可以，請敘述如何分法與拼法並證明三角形面積等於長方形的面積。若不可以請說明理由？

【參考解答】

可以將這三角形 ABC 分成三個部分，再將它們拼成一個長方形 $BCFE$ ，
第一種分法與拼法如下：

設 M, N 為 \overline{AB} 與 \overline{AC} 之中點

(1) 連接 M, N 成一直線並過 B 與 C 作

直線 \overline{MN} 之垂線且交 \overline{MN} 於 E 與 F

(2) 過 A 做 \overline{MN} 之垂線交 \overline{MN} 於 G ，交 \overline{BC} 於 D ，則

$$\triangle AGM \cong \triangle BEM, \triangle AGN \cong \triangle CFN; \quad \text{證得}$$

三角形 ABC 面積等於四邊形 $BCFE$ 面積。

第二種分法與拼法如下：

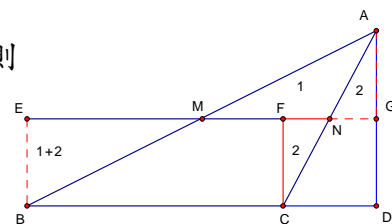
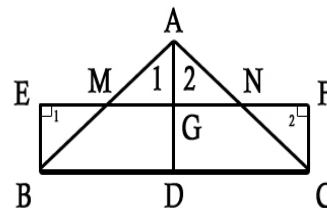
取 \overline{AB} 及 \overline{AC} 的中點 M 及 N 。

(1) 連接 M, N 成一直線並過 B 與 C 作直線 \overline{MN} 之垂線且交 \overline{MN} 於 E 與 F

(2) 過 A 做 \overline{MN} 之垂線交 \overline{MN} 於 G ，交 \overline{BC} 於 D ，由於

$$\triangle AGN \cong \triangle CFN, \triangle AGM \cong \triangle BEM; \quad \text{證得}$$

三角形 ABC 面積等於四邊形 $BCFE$ 面積。



高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 設 a, b, c, d 為四個質數，且滿足 $a > 3b > 6c > 12d$
與 $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1269$ 。試求所有可能的 (a, b, c, d) 。

【參考解答】

因 $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1269$ 為奇數，故 a, b, c, d 中必有偶數存在。故 $d = 2$ 。
由 $a > 3b > 6c > 12d$ 可知 $c \geq 5$ ， $b \geq 2c + 1 \geq 11$ ， $a \geq 3b + 1 \geq 34$ 。

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 &= 1273 \geq (3b + 1)^2 - b^2 + c^2 = 8b^2 + 6b + c^2 + 1 \\ &\geq 8(2c + 1)^2 + 6(2c + 1) + c^2 + 1 = 33c^2 + 44c + 15 \end{aligned}$$

利用 $1273 \geq 33c^2 + 44c + 15$ ，可得出 $c < 7$ 。故 $c = 5$ 。

可得出 $a^2 - b^2 = 1248 = 2^5 \times 3 \times 13$ ， $a - b \geq 2b + 1 \geq 23$ ， $a + b \geq 4b + 1 \geq 45$ 。

且因 $a - b$ 與 $a + b$ 皆為偶數。

可知 $(a - b, a + b) = (26, 48)$ 或 $(a - b, a + b) = (24, 52)$ 。

因此可知 $(a, b) = (37, 11)$ ，而 $(a, b) = (38, 14)$ 則因不為質數而不合。

高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

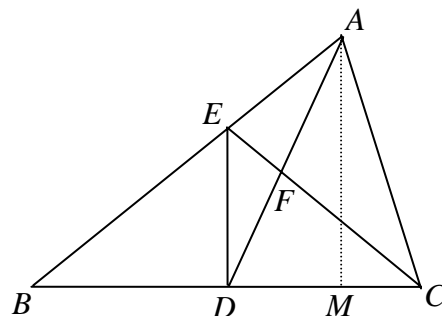
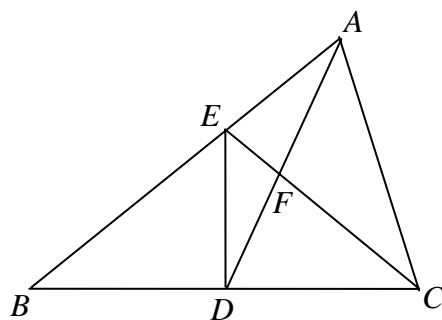
隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 如下圖， $\triangle ABC$ 中 D 是 \overline{BC} 的中點，且 $\overline{AD} = \overline{AC}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ， \overline{DE} 與 \overline{BA} 相交於點 E ， \overline{EC} 與 \overline{AD} 相交於點 F 。若 $S_{\triangle FCD} = 5$ ， $BC = 10$ ，求 \overline{DE} 的長度。



【參考解答圖形】

【參考解答】 (1) 首先，證明： $\triangle ABC \sim \triangle FCD$

$$\because D \text{ 是 } \overline{BC} \text{ 的中點, } \overline{DE} \perp \overline{BC} \quad \therefore \overline{EB} = \overline{EC} \Rightarrow \angle B = \angle FCD$$

$$\because \overline{AD} = \overline{AC} \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC, \text{ 即 } \angle ACB = \angle FDC$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FCD \quad (\text{AAA 相似})$$

(2) 作 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ 於點 M ，

$$\because \text{由(1)知 } \triangle ABC \sim \triangle FCD, \text{ 且 } \overline{BC} = 2\overline{CD}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\right)^2 = 4 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 4 \cdot S_{\triangle FCD} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AM} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 20}{10} = 4, \text{ 且 } \overline{DE} \parallel \overline{AM}$$

$$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \Rightarrow \underline{\underline{\overline{DE} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \times \overline{AM} = \frac{5}{5+5/2} \times 4 = \frac{8}{3}}}$$

高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 若對正整數 k ，存在正整數 m, n 滿足 $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{k}{m^2 + n^2}$ ，試求所有的正整數 k 。

【參考解答】

$$m^2(m^2 + n^2) + n^2(m^2 + n^2) = (m^2 + n^2)^2 = km^2n^2,$$

所以， k 是完全平方數。

設 $k = p^2$ ， p 為正整數，則

$$m^2 + n^2 = pmn \text{ -----(1)}$$

若 $d = (m, n) > 1$ ，則可在(1)式兩邊同時除以 d ，因此，我們可以假設 $(m, n) = 1$ 。

所以， $n | (m^2 + n^2) \Rightarrow n | m^2 \Rightarrow n | m$ 同理， $m | n$ 。所以， $m = n$ ，又 $(m, n) = 1$ ，所以， $m = n = 1, p = 2, k = 4$ 。

高雄市 102 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 設方程式 $7(xy + yz + zx) = 6xyz$ 所有正整數解 (x, y, z) 共有 n 組，若這些正整數解 (x, y, z) 之總和 $x + y + z$ 的最大值為 m ，試求 $m + n$ 之值。

【參考解答】：當 x, y, z 為正整數時，由 $7(xy + yz + zx) = 6xyz$ 可化簡為

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{6}{7} \dots\dots\dots (*)$$

$$\text{不妨設 } x \leq y \leq z \quad \text{則} \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{x} < \frac{6}{7} \leq \frac{3}{x} \quad \text{由此可得} \quad 1 < x < 4 \quad \text{因為 } x \text{ 為正整數，故 } x = 2, 3$$

(1) 當 $x = 2$ 時，由 $(*)$ 得

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{14} \dots\dots\dots (**) \quad \because \frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{y} < \frac{5}{14} \leq \frac{2}{y} \quad \text{由此可得} \quad 2 < y < 6$$

y 為正整數，故 $y = 3, 4, 5$ ，將 $y = 3, 4, 5$ 代入 $(**)$ 僅得 $(y, z) = (3, 42)$ 合乎所求

(2) 當 $x = 3$ 時，由 $(*)$ 得

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{21} \dots\dots\dots (***) \quad \because \frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{y} < \frac{11}{21} \leq \frac{2}{y} \quad \text{由此可得} \quad 1 < y < 4, \text{ 故 } y = 2, 3$$

分別將 $y = 2, 3$ 代入 $(***)$ 可知並無合乎所求的正整數 z

綜合以上知，在 $x \leq y \leq z$ 假設下，僅有一組正整數數對 $(x, y, z) = (2, 3, 42)$

再由對稱性知原方程式共有 6 組正整數數對

$$(x, y, z) = (2, 3, 42), (2, 42, 3), (3, 2, 42), (3, 42, 2), (42, 2, 3), (42, 3, 2)$$

所以 $n = 6$ 和 $m = 2 + 3 + 42 = 47$ 故 $m + n = 53$