

# 高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號：\_\_\_\_\_ 校名：\_\_\_\_\_ 國中 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設  $b + c = 198$ ，試求方程式  $x^2 + bx + c = 0$  的所有整數解。

### 【參考解答】

設方程式的兩根為  $\alpha, \beta$ 。

則有  $\alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

而有  $198 = b + c = -(\alpha + \beta) + \alpha\beta = (\alpha - 1)(\beta - 1) - 1$

故  $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 199$  (質數)

$\Rightarrow \alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 199$ ; 或  $\alpha - 1 = 199, \beta - 1 = 1$ ;

或  $\alpha - 1 = -1, \beta - 1 = -199$ ; 或  $\alpha - 1 = -199, \beta - 1 = -1$ 。

求得方程式兩整數解為 2, 200 或 0, -198。

# 高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號：\_\_\_\_\_ 校名：\_\_\_\_\_ 國中 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

2. 從  $1, 3, \dots, 47, 49$  這 25 個奇數中，任取 14 個數，證明所取出的 14 個數中一定有兩個數之和為 52.

### 【參考解答】

在  $1, 3, \dots, 47, 49$  這 25 個奇數中，

先將相加等於 52 的兩數組成一個數對，於是從這些奇數組成

有  $(3, 49), (5, 47), (7, 45), \dots, (25, 27)$  這樣的 12 數對，

上述每一數對的和是 52.

把這 12 個數對  $(3, 49), (5, 47), \dots, (25, 27)$  和 1 看作 13 個集合，

於是從這 13 個集合中取出 14 個數，

至少有兩個數是出現在某一數對中，而這兩個數之和是 52.

# 高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號：\_\_\_\_\_ 校名：\_\_\_\_\_ 國中 姓名：\_\_\_\_\_

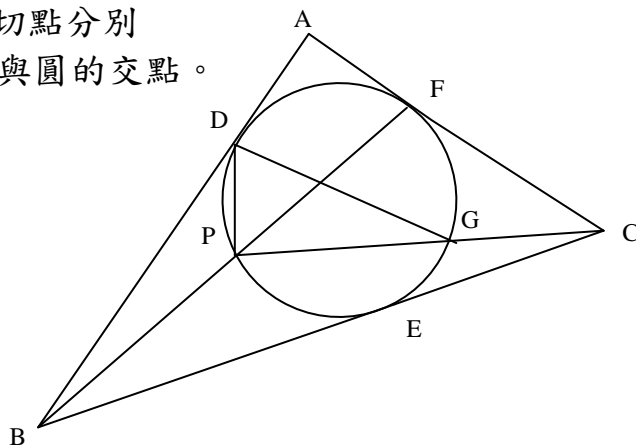
作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

3. 如右圖， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\triangle ABC$  的內切圓的切點分別為  $D$ ， $E$ ， $F$ ，而  $DG$  為圓的直徑， $P$  為  $BF$  與圓的交點。

試證  $\frac{BD}{BF} = \frac{PF}{CF}$



【參考解答】連接  $DF$

$\triangle ABC$  為等腰直角三角形

$\angle DPF = \angle ADF = 45^\circ$ ，

所以  $\angle FPC = 45^\circ$

$\angle PDF = \angle PFC$

故  $\triangle PDF \sim \triangle PFC$

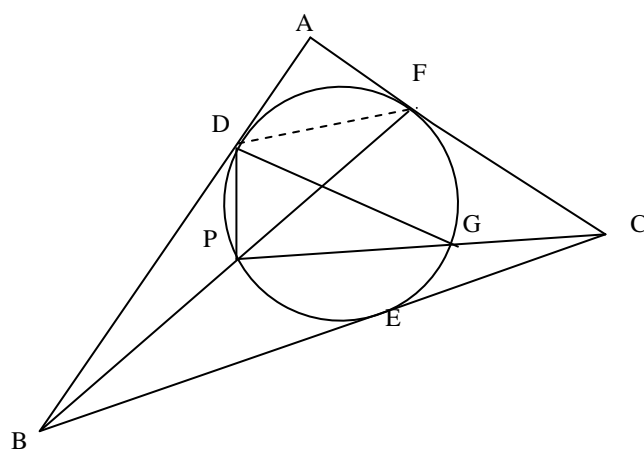
可得  $\frac{DP}{DF} = \frac{FP}{CF}$  (\*)

又  $\angle BDP = \angle BFD$

故  $\triangle BDP \sim \triangle BFD$

可得  $\frac{BD}{BF} = \frac{DP}{DF}$  (\*\*)

因此根據(\*)和(\*\*)  $\frac{BD}{BF} = \frac{FP}{CF}$



# 高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號：\_\_\_\_\_ 校名：\_\_\_\_\_ 國中 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

4. 下圖為  $3 \times 3$  表格。試利用 5 種不同顏色去塗  $3 \times 3$  的九個方格，使得在同一行、在同一列以及在同一條對角線塗上顏色的三個方格其顏色皆不相同，而方格 A 與方格 H 所塗的顏色則需相同。試問如此的著色方法共有多少種？

A	B	C
D	E	F
G	H	I

### 【參考解答】

設 A 與 H 使用了顏色 a，可知除了 F，其他方格皆不能使用顏色 a。

若 F 被著顏色 a。考慮 E, I, C, G, B, D 的順序。

則 E 有 4 種顏色可使用，I 有 3 種顏色可使用，C 有 2 種顏色可使用，G 有 1 種顏色可使用，B 有 2 種顏色可使用，D 有 2 種顏色可使用。

共  $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 96$  種著色法。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

若 F 不被著顏色 a。考慮 E, I, F, C, G, B, D 的順序。

則 E 有 4 種顏色可使用，I 有 3 種顏色可使用，F 有 2 種顏色可使用，C 有 1 種顏色可使用，G 有 1 種顏色可使用，B 有 2 種顏色可使用，D 有 2 種顏色可使用。

共  $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 96$  種著色法。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

且顏色 a 共有 5 種可能。

故著色法共有  $5(96 + 96) = 960$  種。

# 高雄市 101 學年度國民中學數學競賽

## 隊際賽試題

編號：\_\_\_\_\_ 校名：\_\_\_\_\_ 國中 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

5. 將整數 1, 2, 3, ..., 2013 寫在黑板上。請問至少要擦掉幾個數，使得留在黑板上全部的數之乘積的個位數是 8？

### 【參考解答】

因為整數 1, 2, 3, ..., 2013 之中所有 5 的倍數有 402 個，則至少要擦掉全部這 402 個 5 的倍數，才能使得留在黑板上全部之乘積的末位數不是 0。因為 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 之乘積的末位數是 6，所以整數 1, 2, 3, ..., 2013 之中所有非 5 的倍數全部之乘積的末位數是 6。另外因為整數 1, 2, 3, ..., 2013 之中所有 2 的倍數至少有 1000 個，所以擦掉整數 1, 2, 3, ..., 2013 之中任何 403 個整數之後，剩下留在黑板上全部之乘積的末位數一定是偶數，因此擦掉全部 402 個 5 的倍數之後，再擦掉一個 2，則剩下留在黑板上全部之乘積的末位數是 8。