

高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

個人賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

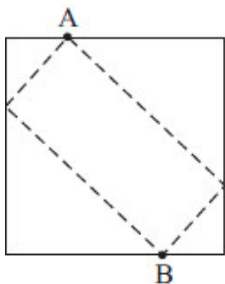
作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 2^{1000} 除以 13 的餘數為 _____。 Ans: 3

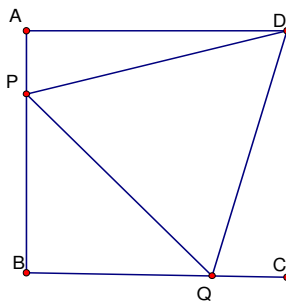
2. 計算 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3967}+\sqrt{3969}} =$ _____。 Ans: 31

3. 將一個正方形的紙張從四個角剪下四個等腰三角形，剩下一個長方形。如下圖，其中 AB 長度為 12 公分，則剪下的 4 個等腰三角形的面積和為 _____。 Ans: 72 平方公分



4. 已知 $a^2 - 3a - 2 = 0$ ，則 $\frac{a^2}{a^4 - 6a^2 + 4} =$ _____。 Ans: $\frac{1}{7}$

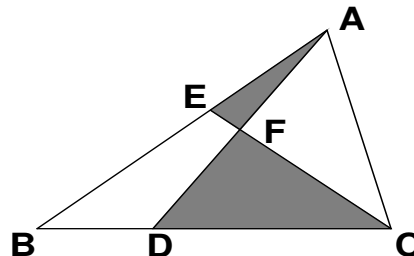
5. 右下圖 $ABCD$ 是正方形， $\triangle DPQ$ 是正三角形。已知 $DP=1$ ，則正方形 $ABCD$ 的面積是 _____。



ANS : $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

6. 設正整數 a 、 b 滿足 $\frac{2}{3} < \frac{b}{a} < \frac{3}{4}$ ，當 a 最小時， $b =$ _____。ANS: 5

7. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，點 D 在邊 \overline{BC} 上，使得 $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ 。在 $\triangle ABC$ 內部取一點 F ，使得 $\overline{AF} = \overline{FD}$ ，作直線 CF 交 \overline{AB} 於 E 點。如果 $\triangle ABC$ 的面積等於 20，那麼圖中陰影部分的面積為 _____。ANS: 8



8. 甲、乙、丙三個容器中，各有一定量的酒精。如果先把甲容器中酒精的 $\frac{1}{3}$ 倒入乙容器中，再把乙容器中的酒精的 $\frac{1}{3}$ 倒入丙容器中，最後再把丙容器中的酒精的 $\frac{1}{3}$ 倒入甲容器，此時三個容器中各含有酒精 $\frac{1}{3}$ 公升，問甲容器中原有酒精多少公升？_____ Ans: $\frac{1}{4}$

9. 計算 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 98^3 + 99^3 =$ _____。ANS: 24502500

10. 已知正實數 x, y, z, w 滿足 $2007x^2 = 2008y^2 = 2009z^2 = 2010w^2$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 1$
則 $\sqrt{20007x + 2008y + 2009z + 2010w} =$ _____。
ANS: $\sqrt{2007} + \sqrt{2008} + \sqrt{2009} + \sqrt{2010}$

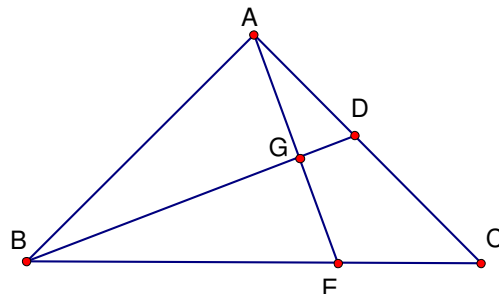
11. 考慮數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...，其中自第三項開始每項皆為前面兩項之和。第 1 項起至第 2010 項為止共有 _____ 項是 3 的倍數。ANS: 502

12. 設 a, b, c 為整數且 $abc \neq 0$ ，已知 $a - b + c = 8$ 且 $b^2 - 2ac = 0$ ，當 a 為最大值時， $2b + c$ 之值為 _____。ANS: 40

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ，設 D 為 \overline{AC} 之中點，在 \overline{BC} 上取一點 E ，使得 \overline{AE} 垂直 \overline{BD} 並交於 G ，求證 $\angle EDC + \angle EAD = 90^\circ$ 。



【參考證明】

作 \overline{CF} 平行 \overline{AB} 並交 \overline{AE} 之延長線於 F

$$\therefore \angle ABD + \angle BAG = 90^\circ$$

$$= \angle ABD + \angle ADB$$

$$\therefore \angle BAG = \angle ADB$$

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CF} \quad \therefore \angle BAG = \angle AFC (= \angle ADB),$$

$$\angle BAD = \angle ACF = 90^\circ$$

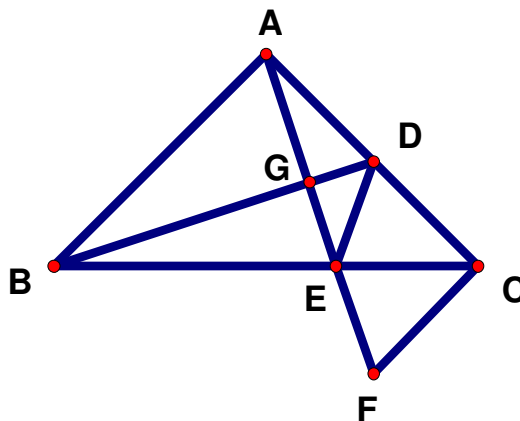
$$\text{又 } \overline{AB} = \overline{AC} \quad \therefore \triangle ABD \cong \triangle CAF$$

$$\therefore \overline{CF} = \overline{AD} = \overline{CD}$$

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CF} \quad \therefore \angle ABC = \angle ECF = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CFE \quad \therefore \angle EDC = \angle EFC$$

$$\text{因此 } \angle EDC + \angle EAD = \angle EFC + \angle EAD = 90^\circ$$



2. 設 $A, B, C, D, E, F, G, H, K, J$ 分別代表 0 到 9 的數字, 且滿足下列條件

$$\begin{aligned} D + D + D &= F, & \frac{B}{H} &= K \\ H + H &= B, & D \times H &= CK \\ G + B + E &= F + A + C, & A \times H &= KE \\ J + A &= CC, & \frac{J}{D} &= K \\ F \times D &= KG, & \frac{D}{J} &= \frac{H}{B} \end{aligned}$$

試求 $A, B, C, D, E, F, G, H, K, J$.

【參考解答】

因為 $J + A = CC$ 所以 $C = 1$

因為 $D + D + D = F$ 所以 $D = 1, 2, 3$

若 $D = 2$ 則 $F = 6$ 且 $K = 1, G = 2$ 矛盾, 所以 $D = 3$

因為 $H + H = B, \frac{B}{H} = K, D = 3, \frac{J}{D} = K, D + D + D = F$

所以 $K = 2, J = 6, F = 9$

因為 $F \times D = KG, F = 9, D = 3, K = 2$ 所以 $G = 7$

因為 $J + A = CC, J = 6, C = 1$ 所以 $A = 5$

因為 $D \times H = CK, D = 3, C = 1, K = 2$ 所以 $H = 4$

因為 $A \times H = KE, A = 5, H = 4, K = 2$ 所以 $E = 0$

因為 $H + H = B, H = 4$ 所以 $B = 8$

3. 一個袋子中有 8 個黑球、5 個白球、7 個黃球。現從中任取 11 個球，使得黑球不少於 3 個，白球不少於 2 個，黃球不多於 3 個，問上述取法的總數共有多少種？

【參考解答】

因黑球不少於 3 個且白球不少於 2 個，故可假設已有 3 個黑球及 2 個白球，討論剩餘的 6 個球即可。

換句話說，可討論有 5 個黑球、3 個白球、7 個黃球，從中任取 6 個球，使得黃球不多於 3 個的取法總數。

若有 3 個黃球，則黑球與白球的數目可為(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)，共四種。

若有 2 個黃球，則黑球與白球的數目可為(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3)，其中(0, 4)因白球超過 3 個不合，共四種。

若有 1 個黃球，則黑球與白球的數目可為(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3)，其中(1, 4)與(0, 5)因白球超過 3 個不合，共四種。

若沒有黃球，則黑球與白球的數目可為(5, 1), (4, 2), (3, 3)，其中(6, 0)因黑球超過 5 個，(2, 4)、(1, 5)與(0, 6)因白球超過 3 個不合，共三種。

故取法的總數為 $4+4+4+3=15$ 種。