

高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓 名:_____,_____,_____,_____

作答時間: 一 小 時

每題各 40 分，共 200 分

1. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長為 a 、 b 、 c ，其中 $c = 2\sqrt{3}$ ， a, b 滿足

方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ ，試求 $\triangle ABC$ 面積可能的值為何？

【參考解答】 由條件知 a, b 為方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的兩正實根，則

I). 若 $a = b$ ，解得 $a = b = 2 \pm \sqrt{2}$

(1) 當 $a = b = 2 + \sqrt{2}$ 、 $c = 2\sqrt{3}$ 時，

$\because a + b = 2(2 + \sqrt{2}) > 2\sqrt{3} = c$ 可以構成三角形， $\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 + 12\sqrt{2}}$

(2) 當 $a = b = 2 - \sqrt{2}$ 、 $c = 2\sqrt{3}$ 時，

$\because a + b = 2(2 - \sqrt{2}) < 2\sqrt{3} = c$ 不能構成三角形， $\therefore S_{\triangle ABC}$ 不存在

II). 若 $a \neq b$ ，由根與係數的關係得知： $a + b = 4$ ， $ab = 2$

推得 $a^2 + b^2 = c^2$ ， $\triangle ABC$ 是一直角三角形且

$\angle C = 90^\circ$ ，故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 1$

得知 $\triangle ABC$ 的面積 $S_{\triangle ABC}$ 為 $\sqrt{9 + 12\sqrt{2}}$ 或 1

高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $\angle A = 108^\circ$ ，試求 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之比值。

【參考解答】 令 $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ，在 \overline{BC} 上取二點 D, E ，使得

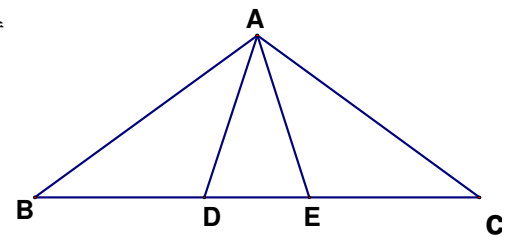
$$\angle BAD = 36^\circ, \angle CAE = 36^\circ, \therefore \angle DAE = 36^\circ.$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{AC} = a, \overline{BD} = b - a,$$

$\triangle ADB$ 和 $\triangle BAC$ 相似

$$\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$\text{令 } x = \frac{b}{a} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

3. 五角星形的五條邊兩兩相交共有十個交點，試問能否在這十個交點處分別填上 2001，2002，……，2010 這十個數，而使每條邊上的四個數之和都相等，若能，請填出來；若不能，請說明理由。

【參考解答】

不能，理由如下：

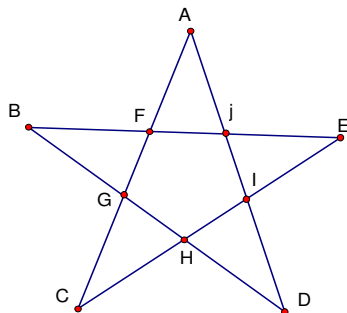
把十個數填入交點處來計算每條邊上的數之和時，因每個數都加了兩次。要滿足每條邊上的四個數之和都相等，則每條邊上的四個數之和應為

$$\frac{1}{5}(2001+2002+\dots+2010)\times 2=8022;$$

case1: 假設 2010, 2009 填在同一邊上(如 A, C 位置或 F, G), 由於任兩邊恰交於一點, 則這條邊上的另外兩個位置 F, G(或 A, C)只能填上 2001 和 2002 數; 而和 2010 所在的另一邊(如 AD), 它另外三個位置只能填上 2003, 2004, 2005; 此時剩下的數還有 2006, 2007, 2008, 而這三個數又不能在同一邊上(會超過 8022), 因此, 舉例而言, 和 2006, 2008 兩數在同一邊上的另外兩個數只能填 2005, 2003, 但是 2005, 2003 兩個數已在 2010, 2003, 2004, 2005(如 AD)這個邊上, 故這種填法是不可能的, 因此, 2010, 2009 不能填在同一邊上。

case2: 假設 2010, 2008 填在同一邊上(在同一邊上另外兩個數為 2001, 2003), 同理可證得這種填法是不可能的。

case3: 仿上依序假設 2010, 2007; 2010, 2006 填在同一邊上是不可能的, 即獲證題中的要求是辦不到的。



高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

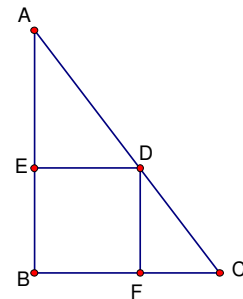
校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

4. 已知一直角三角形，其兩股長分別為 3 單位與 4 單位，欲在此直角三角形區域畫上一正方形，所劃正方形的頂點均需落在此三角形的邊上，試求最大正方形的邊長？

【參考解答】：

先討論所作正方形的四個頂點均需落在此三角形的邊上
因此，所作正方形的四個頂點在三角形的三個邊上，其中
2,2 情形(三角形有兩邊各落下兩頂點)為不可能，另外只有
2,1,1 情形(有一邊落下兩頂點，另外兩邊各落一個點，如
右上圖：AB 邊上有 B,E 兩點，BC 邊和 CA 邊上各有一點；
或右上圖：AC 邊上有 D,G 兩點，BC 邊和 AB 邊上各有一點)
可以成立。



右上圖 $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$, 四邊形 $BFDE$ 為正方形

知： $\triangle AED$ 與 $\triangle DFC$ 相似。因此， $AE : DF = ED : FC$ 且 $ED = DF$ 。

設 $x = ED \Rightarrow (4 - x) : x = x : (3 - x) \Rightarrow 12 - 7x + x^2 = x^2$

$$x = \frac{12}{7}$$

由右下圖知

$ED = EF = FG = DG$

設 $y = EF$

$\triangle ABC$, $\triangle EBF$, $\triangle FGC$ 與 $\triangle ADE$ 皆相似

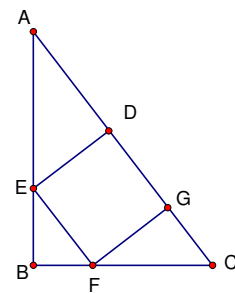
由 $\triangle EBF \sim \triangle ABC$ 知

$$EB : AB = EF : AC \Rightarrow EB : 4 = y : 5 \Rightarrow EB = \frac{4y}{5}$$

由 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 知 $AE : AC = ED : BC \Rightarrow (4 - EB) : 5 = y : 3$

$$\Rightarrow (4 - 4y/5) : 5 = y : 3 \Rightarrow 12 - \frac{12y}{5} = 5y \Rightarrow 60 - 12y = 25y \Rightarrow$$

$$y = \frac{60}{37} = \frac{60 \times 7}{37 \times 7} = \frac{420}{37 \times 7} < x = \frac{12}{7} = \frac{12 \times 37}{7 \times 37} = \frac{444}{7 \times 37}; \text{故最大正方形的邊長是 } \frac{12}{7}$$



高雄地區 98 學年度國民中學數學競賽

隊際賽試題

編號_____

校名:_____

姓名:_____,_____,_____,_____

5. 有 9 個大小不等的正方形 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I ，其邊長分別為 1、4、7、8、9、10、14、15、18。試將這 9 個的正方形排成一個長方形，並畫出這 9 個的正方形的擺法。

【參考解答】：

長方形的面積 s 為

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056 = 2^5 \times 3 \times 11$$

正方形 I 的邊長為 18，因此長方形的長 L 與寬 W 皆必須 ≥ 18 ，又面積 $s = 1056$ 不為完全平方，所以 $L \neq W$ 且必須是 1056 的因數。設 $W < L$ ，則

W 可能為 22, 24, 32

$18 + 4 = 22$ ，但僅有一個正方形 B 其邊長為 4，也僅有一個正方形 A 其邊長為 1，故無法形成一個寬 W 為 22 的長方形。

同理，無法形成一個寬 W 為 24 的長方形。

對於寬 W 為 32，長為 33 的長方形，其排法依序如下：

I (邊長為 18) \rightarrow H (邊長為 15) \rightarrow G (邊長為 14) \rightarrow B (邊長為 4) \rightarrow F (邊長為 10) \rightarrow C (邊長為 7) \rightarrow D (邊長為 8) \rightarrow E (邊長為 9) \rightarrow A (邊長為 1)

